Geometrické transformace

Karel Horák

Computer Vision Group
Department of Control and Instrumentation
Faculty of Electrical Engineering and Communications
Brno University of Technology

Rozvrh přednášky:

1. Úvod.
2. Polynomiální a homogenní reprezentace.
3. Interpolace jasových hodnot.
4. Transformace souřadnic.

Geometrické transformace

Karel Horák

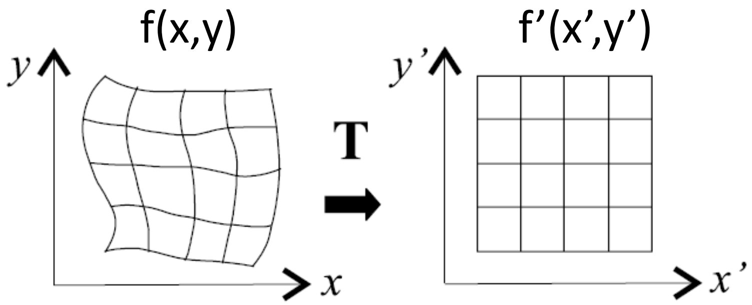
Computer Vision Group
Department of Control and Instrumentation
Faculty of Electrical Engineering and Communications
Brno University of Technology

Rozvrh přednášky:

1. **Úvod.**
2. Polynomiální a homogenní reprezentace.
3. Interpolace jasových hodnot.
4. Transformace souřadnic.

Geometrické transformace – úvod

- Geometrická transformace = transformace souřadnic obrazových bodů a s ní spojená interpolace jasových hodnot



$$f' = T(f) \;\rightarrow \begin{cases} (x,y) \xrightarrow{T} (x',y') \\ f(x,y) \xrightarrow{T} f'(x',y') \end{cases}$$

- Dvě fáze výpočtu transformovaného obrazu:

  – transformace souřadnic obrazových bodů = mapování dvojic (x,y) na dvojice (x',y')

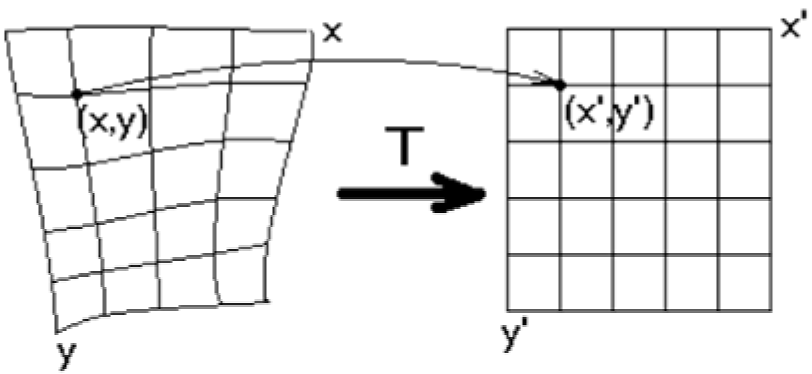
  – interpolace jasových hodnot = určení nové jasové hodnoty v místě mimo ortogonální rastr

Geometrické transformace – úvod

- Využití geometrické transformace:
  – potlačení zkreslení obrazu vzniklého při jeho pořizování – korekce (perspektiva, zkreslení objektivu, letecké snímky,...)
  – geometrické změny obrazu (velikost, rotace, zkosení)

- Hlavní problém geometrické transformace diskrétního obrazu:
  – transformace souřadnic mapuje diskrétní souřadnice na spojité (převod integer $\rightarrow$ real)
  – výstupní obraz ale musí být také reprezentován v pravidelné vzorkovací mřížce

- Důsledky problému:
  – ve výstupním obrazu vznikne díra, kam se nemapuje žádný pixel vstupního obrazu
  – ve výstupním obrazu vznikne nejednoznačnost, kam se mapuje více pixelů vstupního obrazu



Geometrické transformace – úvod

- Složenou transformaci T lze rozložit na dvě složky:

$$x' = T_x(x, y)$$
$$y' = T_y(x, y)$$

- Jak nalézt transformace T_x a T_y?

- Při geometrických změnách obrazu T_x a T_y známe:
  – matematicky jde o dedukci: známe vstup a transformaci, hledáme výstup
  – př.: pro daný vstupní obraz proveď jeho otočení o úhel

- Při potlačení zkreslení T_x a T_y neznáme:
  – je třeba provést kalibraci = pořídit obraz známé (definované) kalibrační mřížky
  – matematicky jde o indukci: známe vstup a výstup, hledáme transformaci
  – př.: pro definovanou ortogonální mřížku a její obraz hledáme transformaci, která v tomto případě reprezentuje přenosovou charakteristiku snímací soustavy (identifikace)

Geometrické transformace

Karel Horák

Computer Vision Group
Department of Control and Instrumentation
Faculty of Electrical Engineering and Communications
Brno University of Technology

Rozvrh přednášky:

1. Úvod.
2. **Polynomiální a homogenní reprezentace.**
3. Interpolace jasových hodnot.
4. Transformace souřadnic.

Geometrické transformace – polynomiální aproximace

- Obecně definovaná transformace neexistuje – používáme polynomiální aproximace:

$$x' = \sum_{r=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-r} a_{rk} \cdot x^r \cdot y^k$$
$$y' = \sum_{r=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-r} b_{rk} \cdot x^r \cdot y^k$$

- Parametr n (stupeň polynomu) je třeba volit podle míry zkreslení:
  – pokud v nekorigovaném obrazu nedochází k velmi rychlým změnám souřadnic $\rightarrow$ $n \leq 3$

- Určení koeficientů a_{rk} a b_{rk}:
  – řešením soustavy rovnic: potřebné hodnoty dvojic (x,y) a (x',y') se zjišťují lokalizací významných vzájemně si odpovídajících bodů
  – metoda nejmenších čtverců (vzhledem k a_{rk} a b_{rk} jsou vztahy pro x' a y' lineární)

Geometrické transformace – polynomiální aproximace

- Bilineární transformace (n = 2):

$$x' = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot x \cdot y + a_4 \cdot x^2 + a_5 \cdot y^2$$
$$y' = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot y + b_3 \cdot x \cdot y + b_4 \cdot x^2 + b_5 \cdot y^2$$

- Afinní transformace (n = 1):

$$x' = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y$$
$$y' = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot y$$

- Jaké operace lze schovat do afinního tvaru?
  – posunutí: členy a_0 a b_0 (tx, ty)
  – rotace: členy a_1, a_2 a b_1, b_2 (sin, cos)
  – měřítko: členy a_1 a b_2 (mx, my)
  – zkosení: členy a_2 a b_1 (sx, sy)

Geometrické transformace – homogenní souřadnice

- Homogenní souřadnice – myšlenka:
  – reprezentace bodu v prostoru o jednu dimenzi vyšším, než odpovídá skutečné dimenzi bodu

- Pro bod v rovině $P=[x,y]^T$ je tak bod reprezentován ve 3D homogenních souřadnicích $P_H=[\lambda\cdot x,\lambda\cdot y,\lambda]^T$ ($\lambda\neq 0$) – pro jednoduchost je zpravidla $\lambda=1$.

- Afinní transformace v homogenních souřadnicích:

$$x' = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y$$
$$y' = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot y$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_0 \\ b_1 & b_2 & b_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Geometrické transformace

Karel Horák

Computer Vision Group
Department of Control and Instrumentation
Faculty of Electrical Engineering and Communications
Brno University of Technology

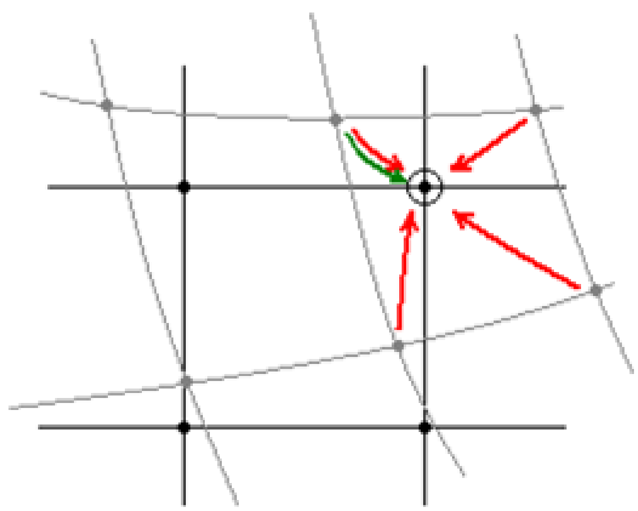
Rozvrh přednášky:

1. Úvod.
2. Polynomiální a homogenní reprezentace.
3. **Interpolace jasových hodnot.**
4. Transformace souřadnic.

Geometrické transformace – interpolace

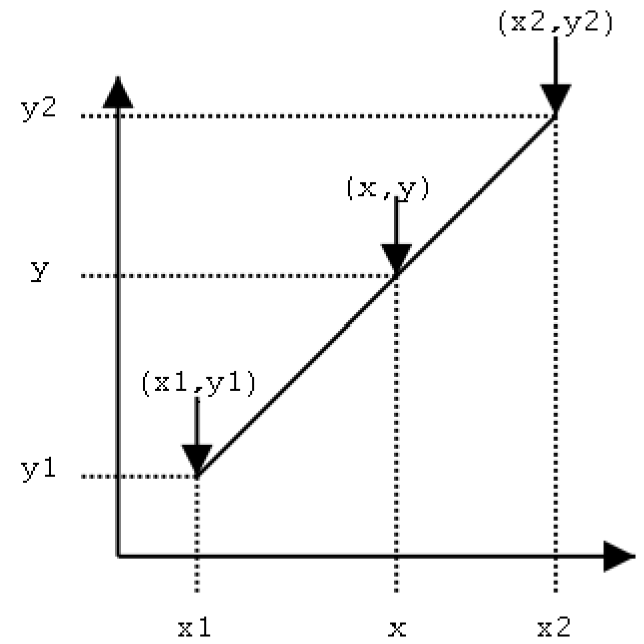
- Geometrické zkreslení obrazu – definice úlohy:
  - – podmínka: výstupní obraz musít být stejně jako vstupní reprezentován pravidelnou ortogonální mřížkou = souřadnicový rastr (x,y)
  - – problém: celočíselným souřadnicím ve výstupním obrazu odpovídají obecně neceločíselné souřadnice ve vstupním obrazu ⇒ nelze přesně určit jasovou hodnotu ⇒ je třeba interpolovat

- Interpolace jasových hodnot – metody:
  - – nejbližší soused (1-NN)
  - – statistika N nejbližších sousedů (k-NN, nejčastěji prostý průměr 4 nejbližších sousedů)
  - – lineární / bilineární / trilineární interpolace (tj. linearizace signálu 1D/2D/3D)
  - – kubická / bikubická / trikubická interpolace (tj. polynomizace signálu v 1D/2D/3D)



Geometrické transformace – interpolace

- Lineární interpolace – opakování:
  - mějme funkci *f* jedné proměnné *x*
  - známe hodnoty funkce *f* v bodech x_1 a x_2
  - chceme znát hodnotu *y* funkce *f* v bodě $x \in (x_1, x_2)$



- Neznámá hodnota $y=f(x)$ se pak vypočítá:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1 \quad = k \cdot x + q$$

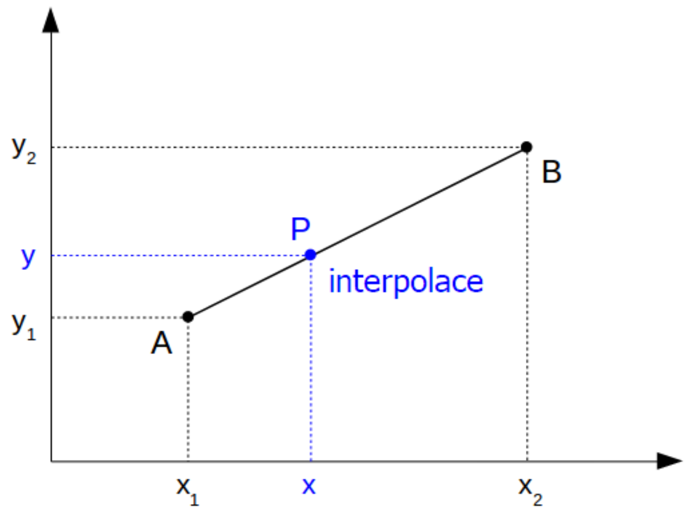
- Interpolace je tak odhad neznámé hodnoty funkce *f*

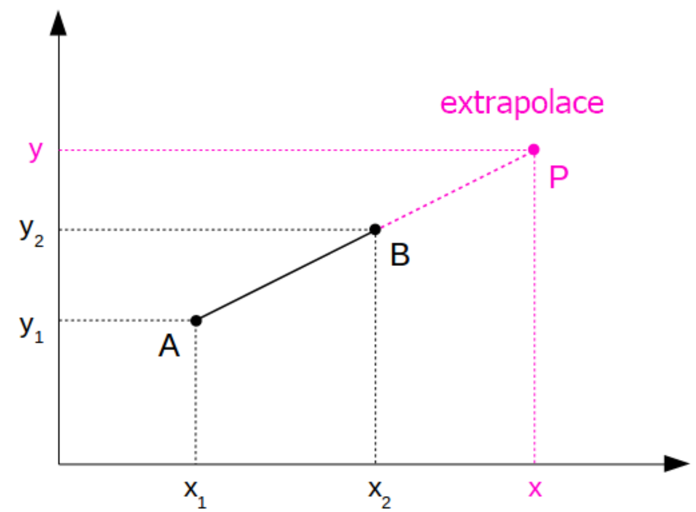
- Interpolace se používá zpravidla pro:
  - nalezení neznámých hodnot *y* v intervalu známých hodnot *x* (viz příklad výše)
  - aproximaci hodnot složitějších nelineárních funkcí

- Pro funkce více proměnných existuje analogická bilineární interpolace (2D), trilineární interpolace (3D),…

Geometrické transformace – interpolace

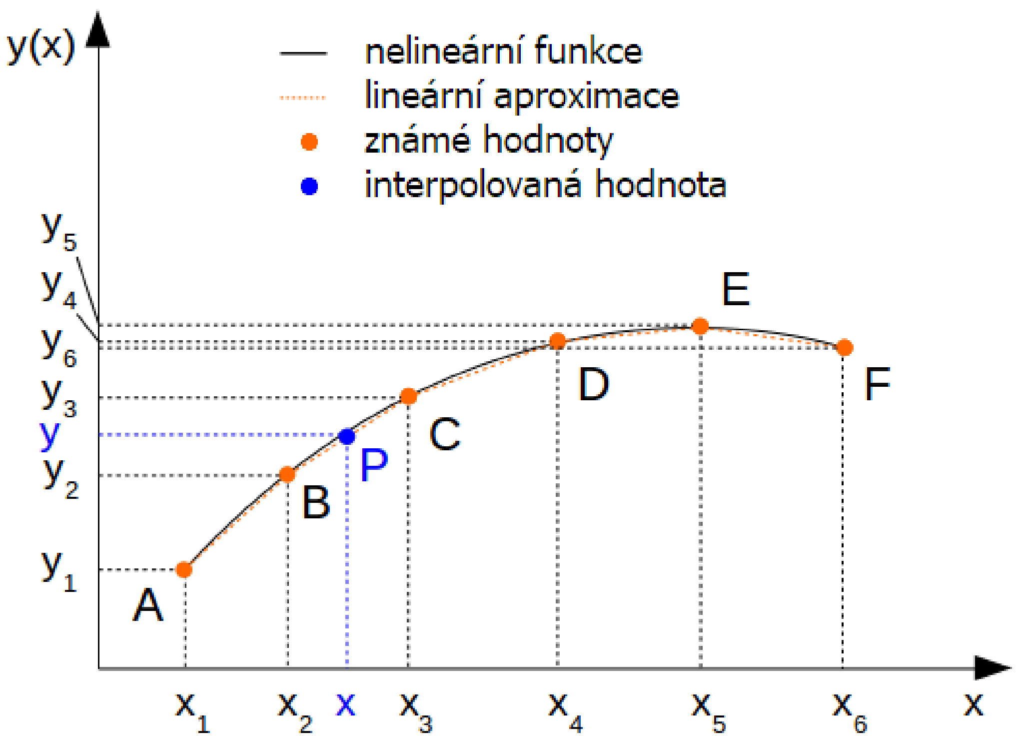
- Lineární interpolace – opakování:
  - mějme stále funkci *f* jedné proměnné *x*
  - pokud $x \notin (x_1, x_2)$ nazýváme úlohu extrapolací





Geometrické transformace – interpolace

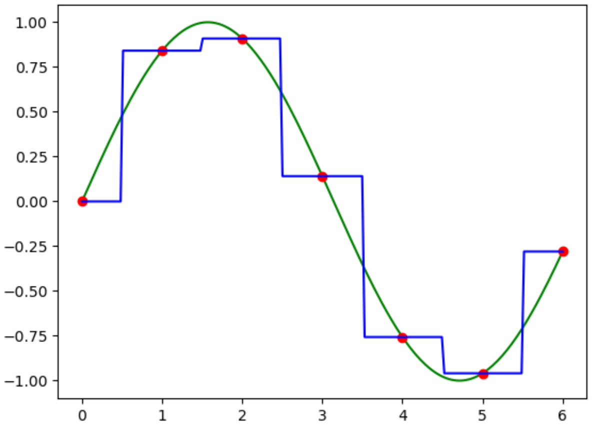
- Lineární interpolace jako metoda aproximace nelineární funkce:
  - obecně nelineární funkce *f* jedné proměnné *x* může být aproximována po částech lineární funkcí
  - na omezeném intervalu hodnot (x_{left}, x_{right}) nezávisle proměnné *x* jsou známy body (x_n, y_n)
  - aproximace = mezi těmito body (A,B,C,…) jsou hodnoty y_n vypočítány např. lineární interpolací

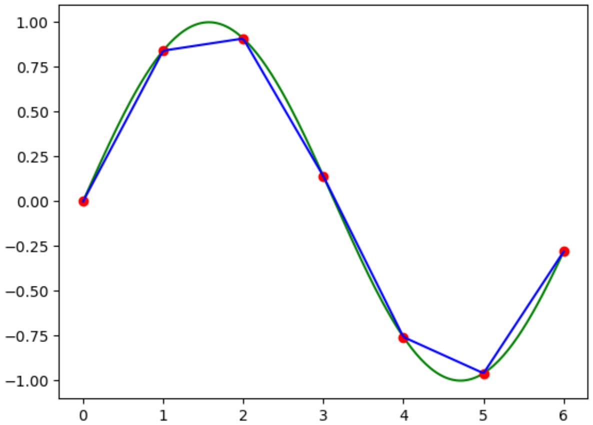


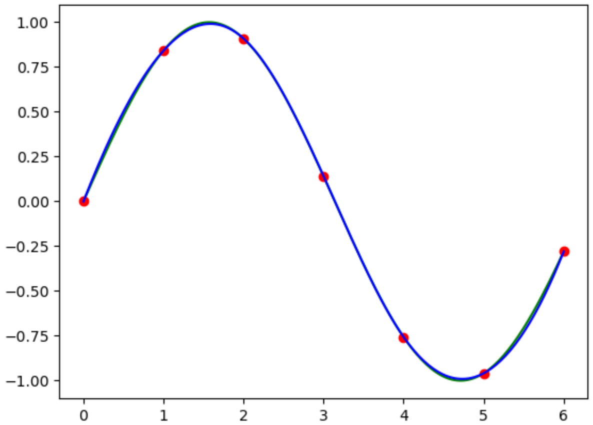
Geometrické transformace – interpolace

- Interpolace – srovnání metod na příkladu *f(x)=sin(x)*:
  - interpolace nejbližším sousedem (analogie sample&hold)
  - lineární interpolace (ekvivalent jsme se učili už v mateřské školce hrou „spojte body“)
  - kubická interpolace (potřebujeme 2 body vlevo a 2 body vpravo – náhrada složité nelineární funkce jednodušší, ale stále nelineární funkcí)

- Srovnej: u nejbližšího souseda potřebujeme jen jeden bod (nejbližší vlevo nebo vpravo), u lineární interpolace dva (jeden vlevo a jeden vpravo) a u kubické už čtyři (dva vlevo a dva vpravo)





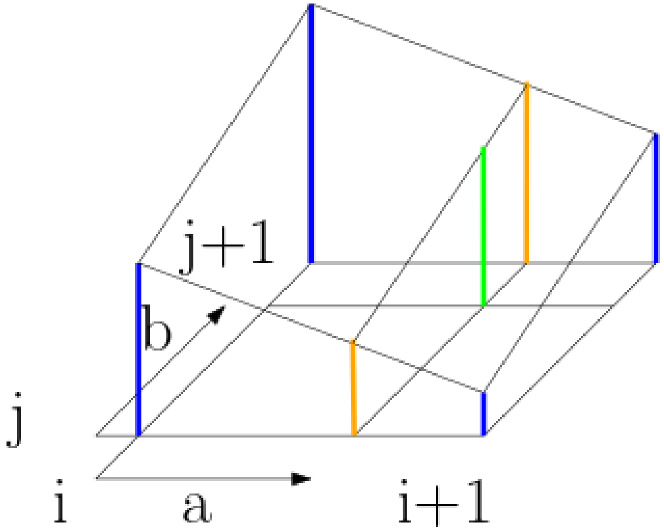


- Pozn.: druhá a vyšší derivace křivky interpolace je vždy = 0 (vyjma vzorkovaných bodů, kde není definována – v těchto bodech není interpolovaná funkce diferencovatelná)

Geometrické transformace – interpolace

- Bilineární interpolace:
  - rozšíření lineární interpolace na funkci dvou proměnných = např. obraz *f(a,b)*
  - pozn.: pro 2D funkci lze analogicky také využít metody nejbližšího souseda, kubické nebo i jiné (např. spline) interpolace

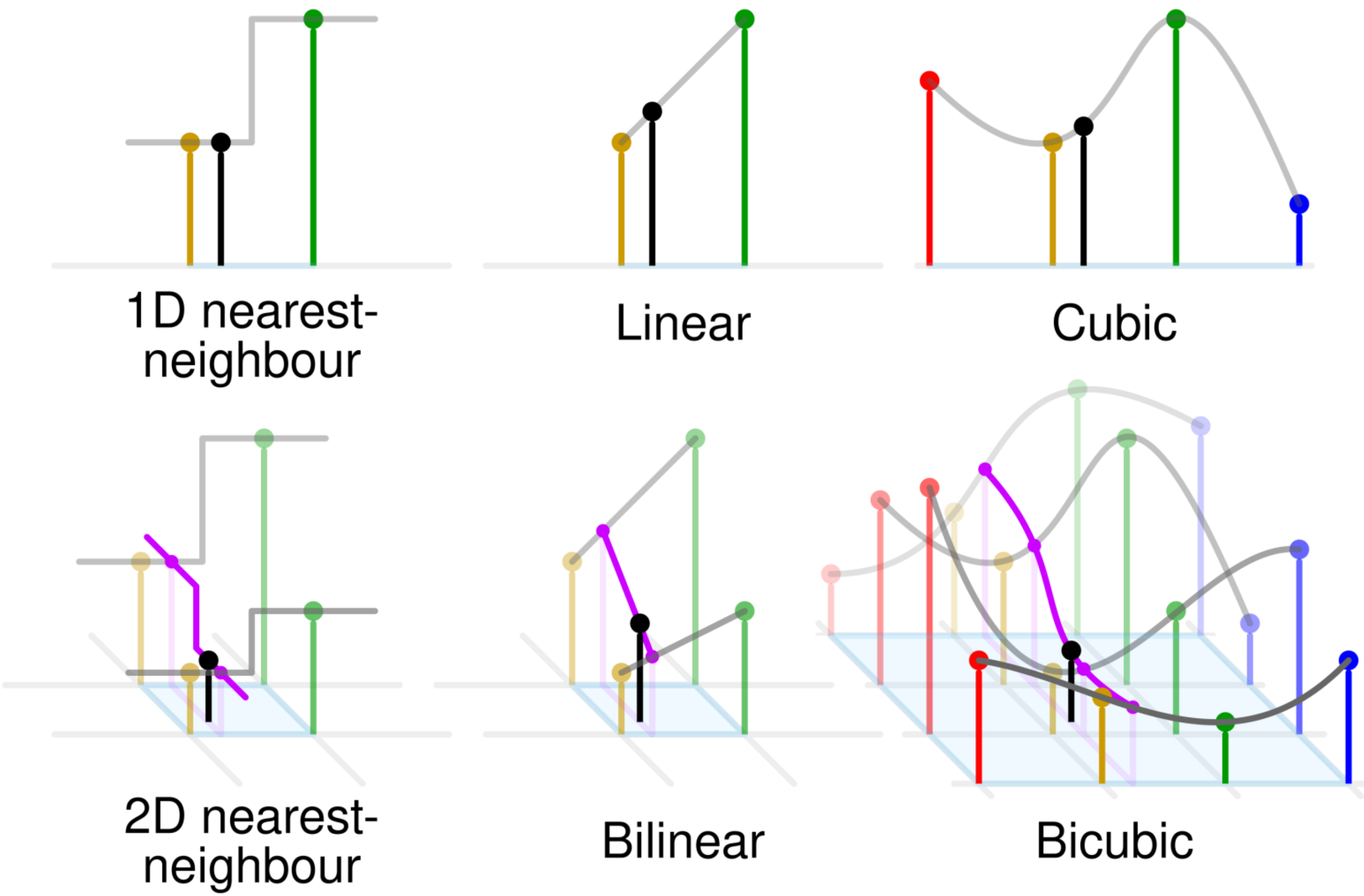
- Pro výpočet (odhadu) hodnoty funkce *f* v bodě *(x,y)* pro *i≤x≤i+1* a *j≤y≤j+1*:
  - nejprve provedeme interpolaci v jednom vybraném směru, např. podél osy *a*, čímž vypočítáme dvě hodnoty *f(x,j)* a *f(x,j+1)*
  - poté provedeme interpolaci těchto dvou hodnot *f(x,j)* a *f(x,j+1)* podél druhé osy (zde osy *b*) a tím nalezneme výslednou hodnotu f(x,y)



- Pozn.: horní plocha na obrázku (střecha) není rovina, ale obecná 2D křivka

Geometrické transformace – interpolace

- Ilustrace nejbližšího souseda, lineární a kubické interpolace pro 1D a 2D funkci:



Geometrické transformace

Karel Horák

Computer Vision Group
Department of Control and Instrumentation
Faculty of Electrical Engineering and Communications
Brno University of Technology

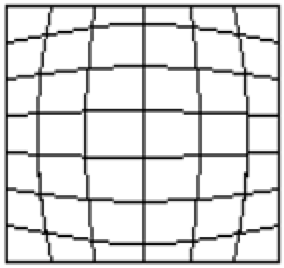
Rozvrh přednášky:

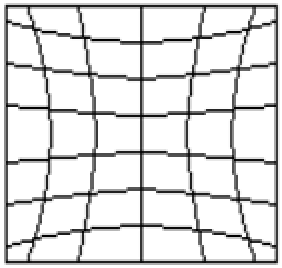
1. Úvod.
2. Polynomiální a homogenní reprezentace.
3. Interpolace jasových hodnot.
4. **Transformace souřadnic.**

Geometrické transformace – korekce zkreslení

- Korekce zkreslení:
  - T_x a T_y neznáme $\rightarrow$ aproximujeme analytickou funkcí odpovídající předpokládanému zkreslení
- Radiální zkreslení (soudek, poduška):
  - r = radiální vzdálenost bodu (x,y) od středu obrazu (popř. jiného vztažného bodu středu zkreslení)

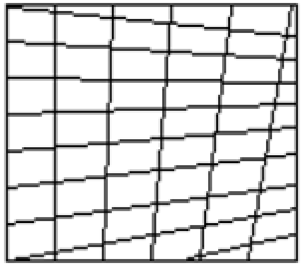
$$x' = x \cdot (1 + \kappa_1 \cdot r^2 + \kappa_2 \cdot r^4 + \kappa_3 \cdot r^6)$$
$$y' = y \cdot (1 + \kappa_1 \cdot r^2 + \kappa_2 \cdot r^4 + \kappa_3 \cdot r^6)$$





- Tangenciální zkreslení (perspektiva):

$$x' = x + 2\rho_1 \cdot y + \rho_2 \cdot (r^2 + 2x^2)$$
$$y' = y + 2\rho_2 \cdot x + \rho_1 \cdot (r^2 + 2y^2)$$



Geometrické transformace – rotace

- Otočení obrazu o 90°, 180° a 270°:
  - – záměna řádků a sloupců
  - – nedochází ke zkreslením tj. rot(90°) ≠ rot(rot(45°))

- Otočení obrazu o libovolný úhel α – definice:

$$\begin{aligned} x' &= a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y \\ y' &= b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot y \end{aligned} \quad \text{kde} \quad \{a_0, b_0\} \rightarrow 0, \{a_1, a_2, b_1, b_2\} \rightarrow \{sin, cos\}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Otočení obrazu o libovolný úhel α – dvouprůchodový algoritmus I(x,y)→J(x’,y)→K(x’,y’):
  1. řádky:

$$x' = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha \quad \rightarrow \quad J(x', y)$$

  2. sloupce:

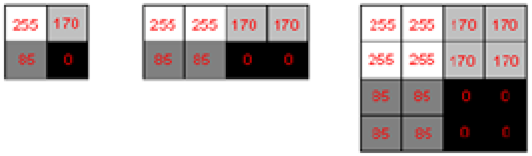
$$y' = \frac{x' \cdot \sin\alpha + y}{\cos\alpha} \quad \rightarrow \quad K(x', y')$$

Geometrické transformace – měřítko

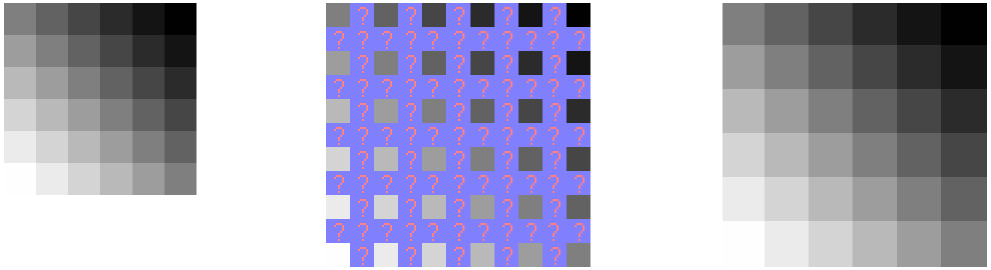
- Změna měřítka zahrnuje zmenšení/zvětšení obrazu = změna rozlišení

- Používají se zmíněné interpolační metody:
  - – nejbližší soused
  - – bilineární
  - – bikubická
  - – vyšší řády (spline, sinc)

- Interpolace nejbližším sousedem (nearest neigbour NN):
  - – uvažuje 1 sousední pixel → nejrychlejší interpolační metoda
  - – výsledkem je hodnota obrazové funkce nejbližšího souseda

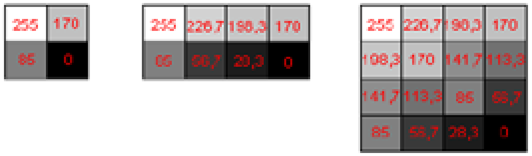


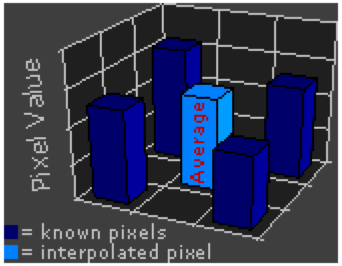
- Úloha:
  - – výpočet 2x zvětšeného obrazu

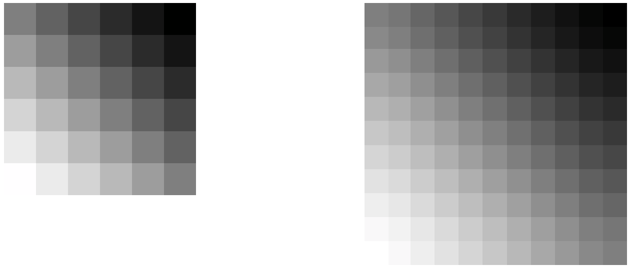


Geometrické transformace – měřítko

- Bilineární interpolace obrazu:
  - uvažuje 2x2 okolí kolem neznámého (počítaného) bodu
  - lineární interpolace po sloupcích C(x) + po řádcích R(x)
  - plynulejší výsledek oproti NN
  - pokud jsou pixely okolí vzdáleny stejně, pak výsledek = aritmetický průměr 4 sousedů







- Bikubická interpolace obrazu:
  - uvažuje 4x4 okolí kolem neznámého (počítaného) bodu
  - vzdálenost bodů už není stejná jako v případě bilineární int.
  - různé váhy pro sousedy v různých vzdálenostech