

# Zpracování vícerozměrných signálů

## Integrální transformace (InTr.)

Miloslav Richter



Rozvrh přednášky:

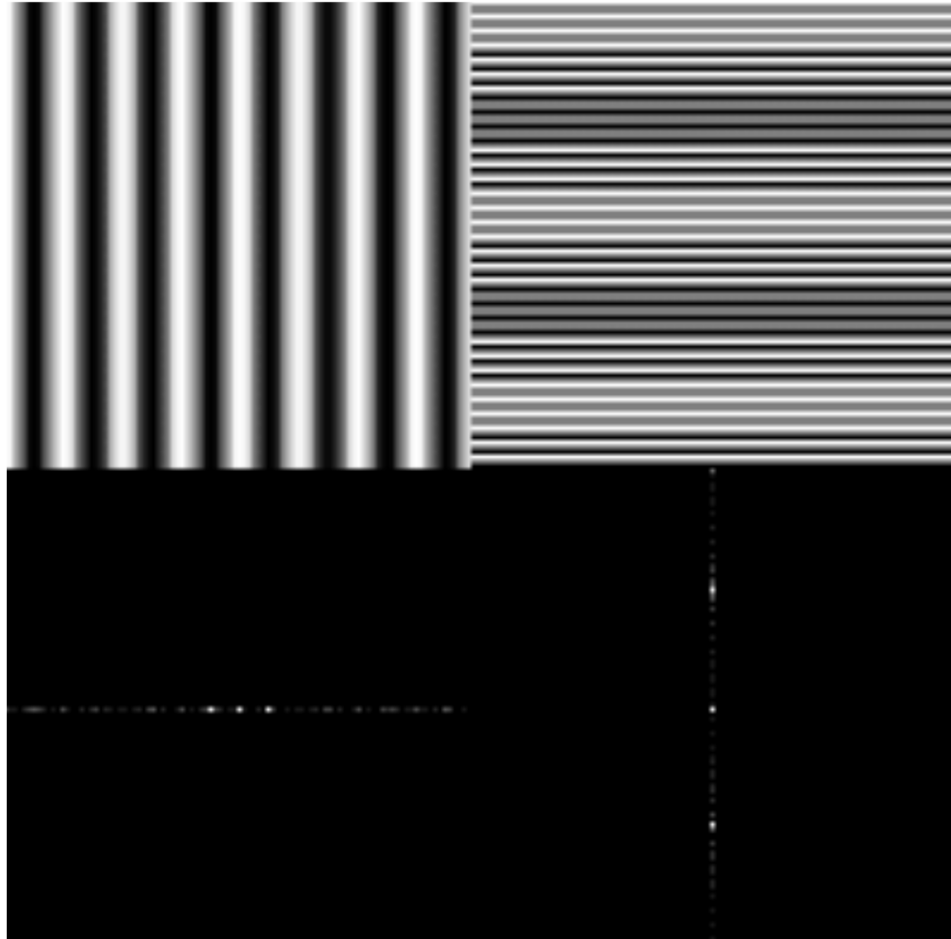
1. Základní pojmy a vlastnosti - opakování
2. Tvorba filtrů
3. Inverzní/Optimální/Wienerova filtrace
4. SinováFT, cosinováFT,
5. ShortTimeFT
6. wavelety

# Základní pojmy - opakování

- **Naplánovat zkoušky - termíny**
- <http://users.rowan.edu/~polikar/WTpart1.html>
- InTr – FT - Převod z prostorové do frekvenční domény
- Celočíselný podíl periody vůči délce vzorku -> jeden vrchol ve spektru
- vrchol je symetrický vůči ose – komplexně sdružený (amplitudy stejné, fáze jiné)
- Frekvence ve frekvenční doméně není lokalizovaná v čase (je v celém intervalu, prakticky od mínus do plus nekonečna – opakující se původní signál). V (obecném) časovém průběhu (většinou) nejsou patrné frekvenční vlastnosti, zastoupení frekvenčních složek
- Taylor – 1715; Fourier – 1807; FFT – 1965; STFT – 1977 (cca); wavelet – 1980;

# Základní pojmy - opakování

- Prostorová frekvence

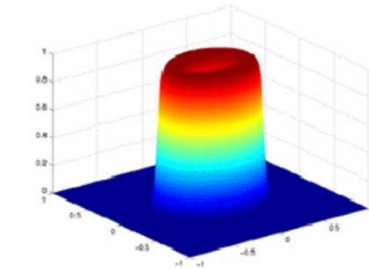
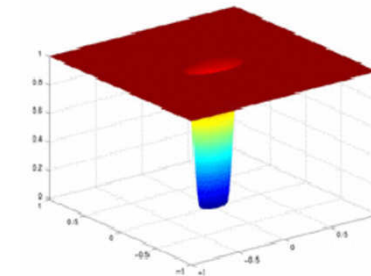
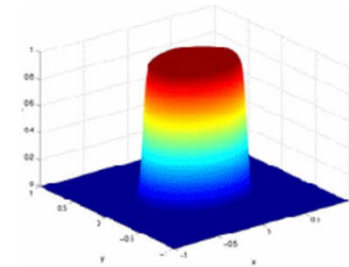
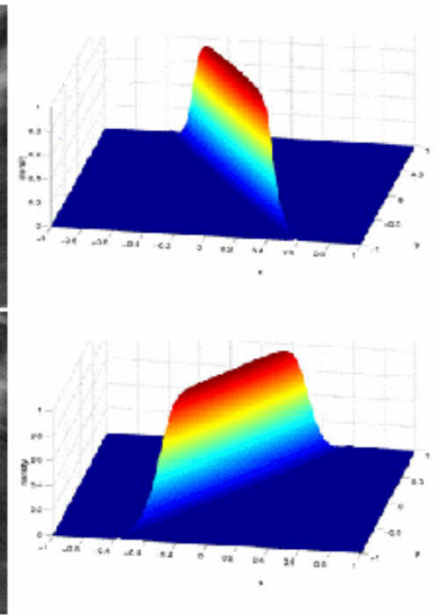
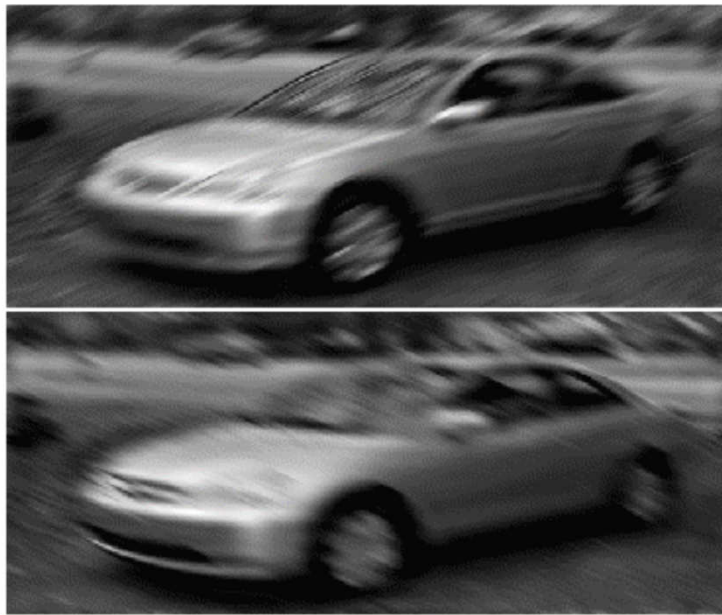


# Tvorba filtrů ve frekvenční oblasti

- Filtry by neměly mít ostré hrany – obrazem je (tvarově) sinc (tj. obdélníkový filtr se rozprostře přes celý snímek)
- Vhodné jsou filtry odvozené od Gaussové křivky. Další používané tvary Bessel, Čebyšev, Butterworth, oknové funkce
- Při filtraci je problémem periodicitu signálu. To vlastně znamená, že protilehlé okraje sousedí. Při zpracování tedy nastává přesah filtrů přes okraje a tedy zkreslení výsledků (v rámci těchto přesahů).
- Výsledné krajní hodnoty budou vždy nepřesné (filtr zasáhne mimo oblast reálných dat). Řešení:
  - na výstupu - vypustit části ovlivněné prolnutím filtru přes okraj.
  - na vstupu - zvětšit obrázek a doplnit ho – padding (doplní se nulami, opakují se krajní hodnoty, nebo plynulý přechod mezi okraji).

Nr 13.1.1/668

# Tvorba filtrů ve frekvenční oblasti



# Filtr – ss a nízké frekvence

Original Image

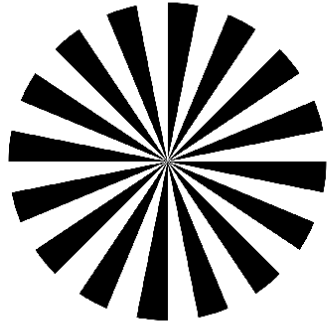
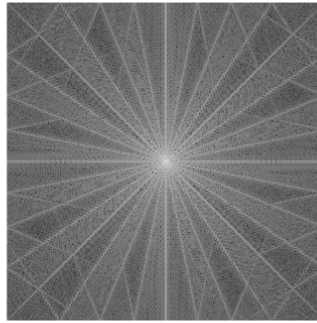
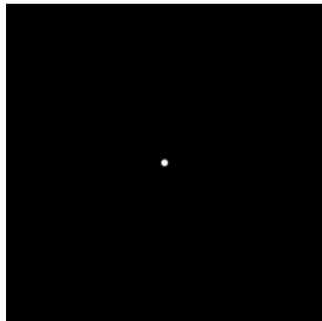


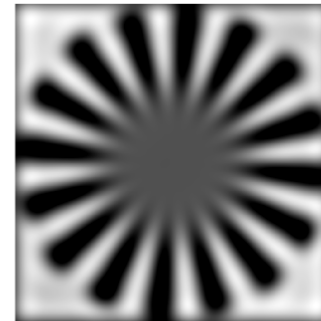
Image in Fourier Domain



Filter Image



Filtered Image



# Filtr – nižší a střední frekvence

Original Image

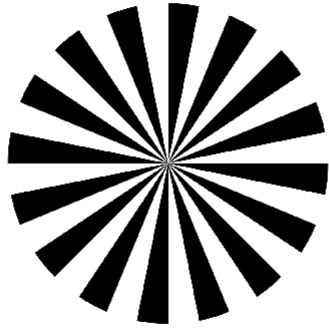
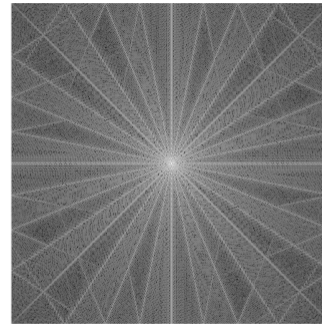
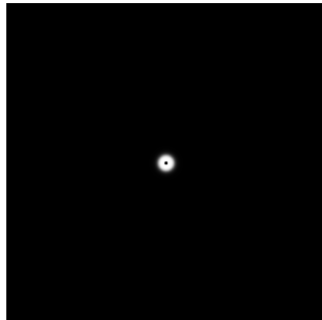


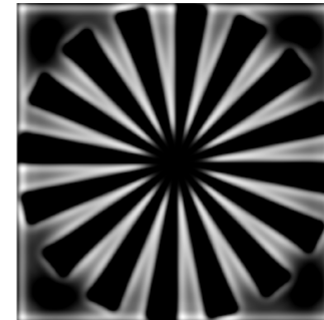
Image in Fourier Domain



Filter Image



Filtered Image



# Filtr – střední frekvence

Original Image

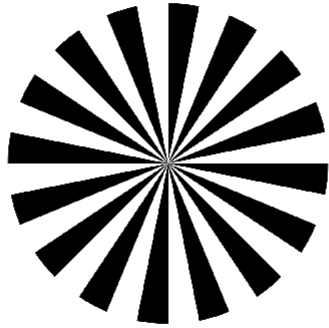
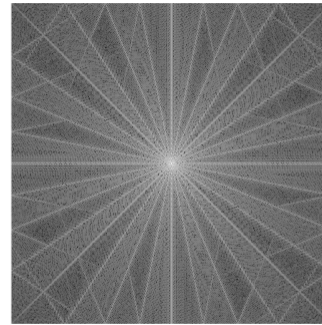
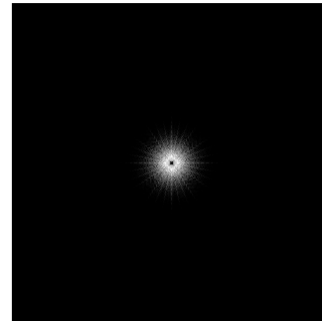
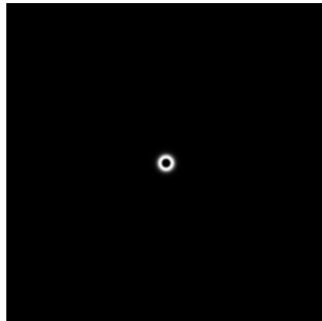


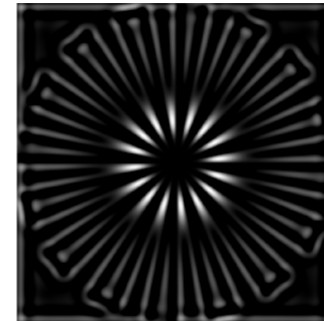
Image in Fourier Domain



Filter Image



Filtered Image





# Filtr - vysoké frekvence

Original Image

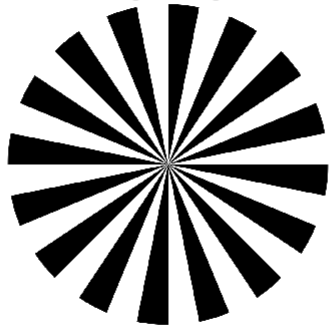
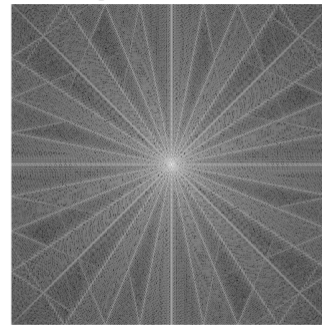
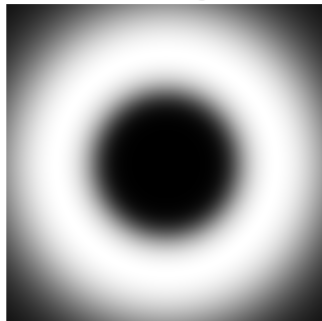


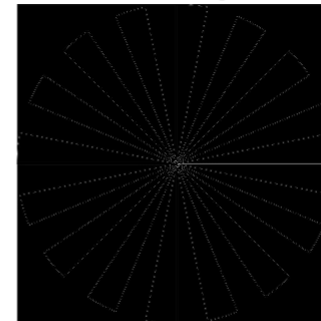
Image in Fourier Domain



Filter Image



Filtered Image



# Filtr – pásmový, směrový

Original Image

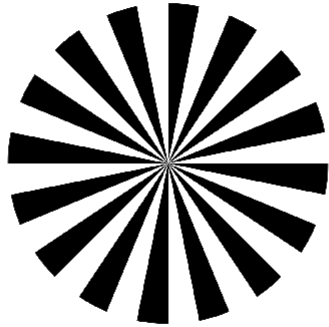
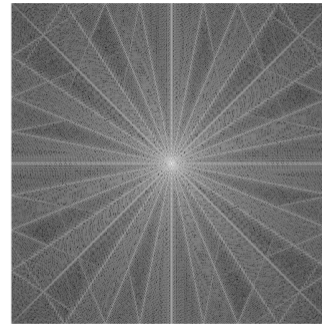
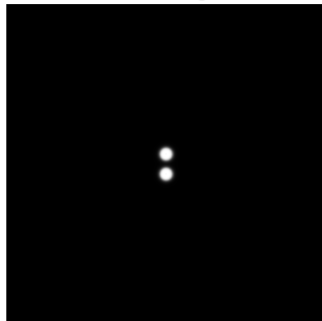


Image in Fourier Domain



Filter Image



Filtered Image



# Inverzní filtrace

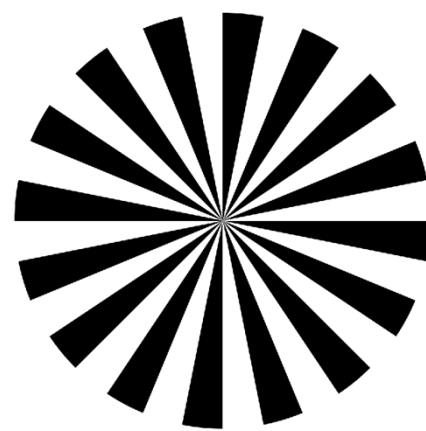
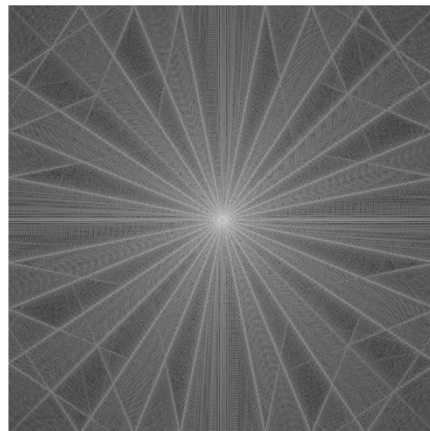
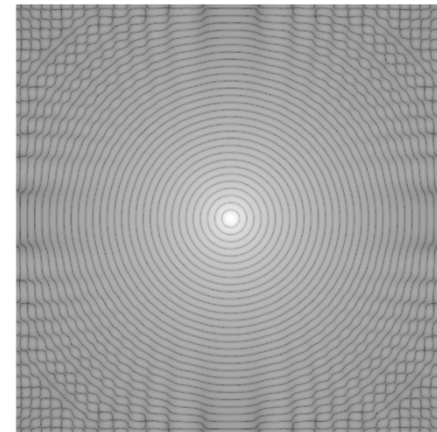
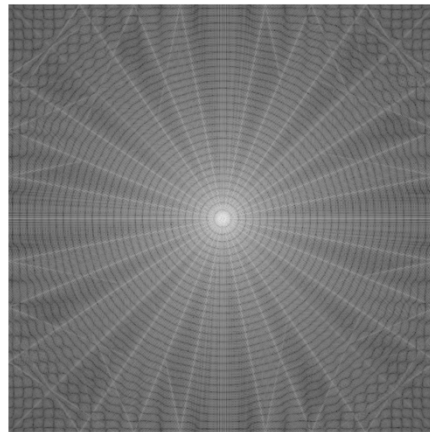
- Nr 13.1 NR 13.3 674
- Dekonvoluce – inverzní proces ke konvoluci –  
obraz=zkreslení.originál -> originál = obraz/zkreslení)  
problém s malými členy ve filtru (zvětší neúměrně hodnotu v daném místě;  
na druhou stranu, již při aplikaci tohoto filtru je výsledek enormně zmenšen  
a tedy je zde možná ztráta dat (rozlišovací schopnost). Je-li navíc signál  
zašuměný, pouhá „inverzní“ aplikace filtru může vést ke zvýraznění šumu
- Ve frekvenční doméně je konvoluce násobením -> inverzí je dělení ->  
výhoda řešení ve frekvenční oblasti
- Wiener NR 13.3 674,675

# Inverzní / Optimální / Wienerova filtrace (dekonvoluce)

- Použití filtru na obnovení poškozeného obrazu. Poškození musí být „známé“ (odhadnutelné) aby šlo vytvořit jeho model = filtr. Poškození může být šum, rozmazání ...
- Rušení se musí objevit v celé ploše – jinak korekce část snímku „opraví“ ale zbytek poškodí (např. periodické rušení pouze v polovině snímku)
- Vychází z frekvenčních znalostí poškození a původního obrazu, šum je aditivní, poškození odpovídá konvoluci
- Výsledek = original \* zkreslení + šum chceme získat (odhad) original
- $\text{Filtr} = (\text{poškození} \cdot \text{Original}) / (\text{poškození}^2 \cdot \text{original} + \text{šum})$  (signály jsou střední spektrální hustoty)
- $\text{odhadOriginal} = \text{Filtr} \cdot \text{Výsledek}$
- <https://www.ft.unicamp.br/docentes/magic/khoros/html-dip/c7/s1/front-page.html>

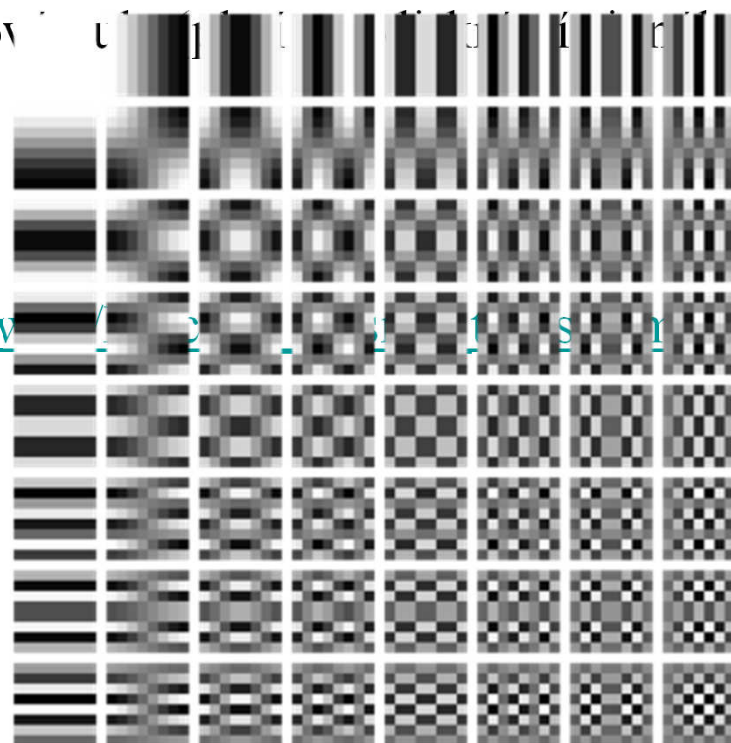
# Inverzní filtrace

- Rozmazaný snímek  $\rightarrow$  fft ; fft rozmazání; fft / fft rozmazání  $\rightarrow$  ifft = „original“



# (Diskrétní) cosinová a sinová transformace

- [www.nr.com](http://www.nr.com) 645
- Obsahují pouze cos (resp. Sin) členy, ale i v půlperiodách nr 12.4/645
- Cosinová má na krajích hodnotu, sinová (u určité délce)
- Obraz jsou reálná čísla
- Využití v kompresi signálu
- Wiki – sfing <https://en.wikipedia.org/v>
- Obrázek – bázové funkce cos [wikipedia]



# Windowing

- Potřebujeme-li vybrat pouze část signálu, tento výběr změní i výslednou FT
- K získání vybraného úseku se často používá násobení „oknem“ (okénkovou funkcí, např. i obdélníkovou funkcí – Dirichlet W.)
- Signál je násoben oknem (Hann, Hamming, Gaussian), okno nuluje data vně intervalu a váhuje hodnoty uvnitř intervalu – potlačením krajů mění i frekv. průběh  
Okno je „Gaussovského“ typu – bez ostrých hran, s potlačením konců (odstranění ostrých přechodů mezi koncem a začátkem signálu tj. v signálu nepřekryjí vyšší frekvence)  
okna „gauss“ na kraji a ve středu konstantní hodnota (Tukey W....)
- výběrem okna mohou splynout dvě frekvenční čáry, nebo silnější čára může překrýt slabší maximum (viz. „rozšíření“ spektrální čáry pro frekvence, které nejsou celočíselným násobkem délky intervalu) -> okno je nutno volit podle účelu použití (detekované vlastnosti a typu signálu)

# Windowing

- Okna ve frekvenční doméně mají „sinc“ tvar s tím, že mají různou šířku prvního laloku (snažíme se aby byl co největší) a různý útlum ostatních laloků (snažíme se aby byl co největší) : obdélníkové – flat top (má negativní kraje)



# Short Time Fourier Transform

- <http://users.rowan.edu/~polikar/WTpart2.html>
- Rozdělení signálu na úseky s nezávislou FT, popř celý úsek s posuvným oknem
- 2D výstup pro 1D signál – k frekv. spektru se přidává počátek intervalu detekce v čase (posun může být o daný krok) tj. funkce frekvence a polohy
- Všechny průběhy mají stejné spektrum (stejná délka) odpovídající použitému časovému úseku .
- Větší délka znamená horší lokalizace v čase (krátce působící frekvence je „roztažená“ mimo úsek ve kterém se nachází)
- Kratší délka znamená nemožnost detekcí delších vlnových délek (nižších frekvencí) – čím lepší lokalizace, tím méně frekvencí je v ní zastoupeno (Heisenberg)
- [Wavelet.org/tutorial/tf.html](http://Wavelet.org/tutorial/tf.html)

# Wavelet

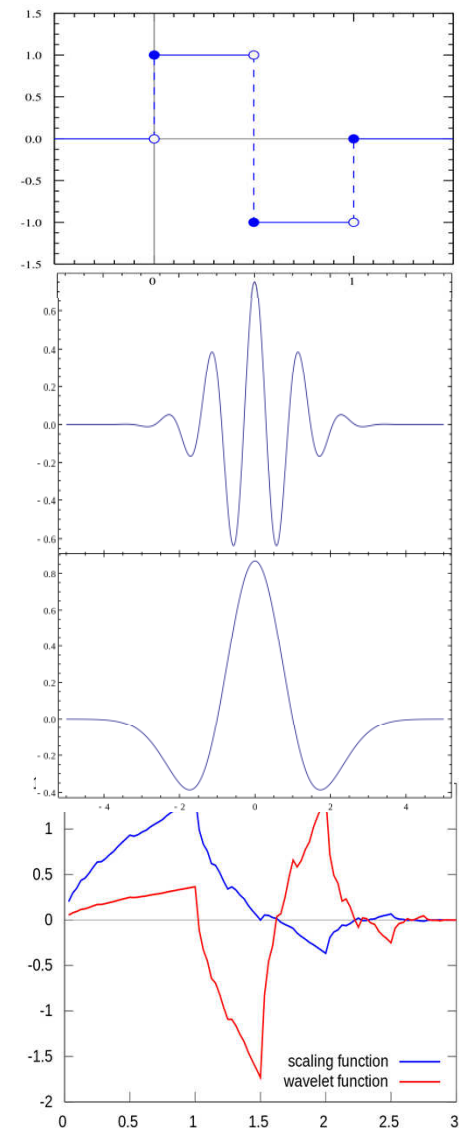
- <http://users.rowan.edu/~polikar/WTpart1.html>
- <http://users.rowan.edu/~polikar/WTpart3.html>
- Složitější teorie. Více funkcí pro jádro. Lepší lokalizace t/w
- STFT – okno konstantní velikosti se posouvá po signálu - stejný rozsah frekvencí
- Na rozdíl od STFT jsou zde lokalizovány všechny frekvence (od nejdelší po nejkratší)
- Výsledné zobrazení jednorozměrného signálu je matice (může mít různé rozlišení v různých řádcích na rozdíl od STFT)
- Princip neurčitosti – nemůžeme určit kdy se frekvence projevuje v čase, ale můžeme určit, které frekvenční pásmo je ve kterém časovém intervalu.

# Wavelet

- Featured transformation – modifikuje data, zachovává informaci
- WT okno mění rozměr a posouvá se po signálu odpovídající délky = různé rozlišení pro různě dlouhé úseky (krátký úsek: dobrá prostorová lokalizace pro vysoké frekvence, dlouhý úsek : nízké frekvence se špatnou časovou lokalizací)
- Výsledek udává zda je daná frekvence přítomná a zároveň i místo kde (u FT se průběh sinového signálu proloží celou délkou a zjistí se shoda; u WT se vezme jedna perioda a s ní se zjišťuje shoda v jednotlivých pozicích signálu)

# Wavelet - základy

- Vlnka (wave-let) – funkce pro jádro transformace NR 730
- Mateřská vlnka (mother wavelet)  $\psi$  – základní tvar vlnky  
Uvedené vlnky – Haar, Morlet, Mexican Hat, Daubechies
- Posun (translation/shift)  $\tau$
- Měřítko (scale)  $s$
- Velikost okna se mění (se změnou měřítka vlnky)
- [Wavelet.org/tutorial/wbasic.html](http://Wavelet.org/tutorial/wbasic.html)
- [Wavelet.org/tutorial/whistory.html](http://Wavelet.org/tutorial/whistory.html)



# Wavelet základy

- Scale – měřítko pro úpravu základní (mother) vlnky; základní délka přes celý rozsah je  $=1$ ; (scale je obdoba periody); v dalších krocích se scale zmenšuje;  
Dá se i naopak (zvětšovat hodnotu scale) – základní vlnka je nejkratší (algoritmus dif/sum) – délka by měla odpovídat největší frekvenci, kterou chceme detekovat  
Měřítko se mění v určitém poměru tak aby tvořily určitá pásma pro vyhodnocení
- Translation – posun vlnky pro daný scale (a band)
- Mother wave – například jedna perioda cosinového průběhu; další průběhy jsou pak s menší periodou (větší frekvencí)

# Wavelet – spojitá WT

- Spojitá i diskrétní pracuje s diskrétním signálem
- Spojitá WT používá menší hodnoty kroku a mezi měřítky
- Spojitá WT používá pro posun krok = 1
- Diskrétní WT používá pro posun krok = délka vlnky
- Rovnice CWT:  $CWT_x^\psi(\tau, s) = \Psi_x^\psi(\tau, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int x(t) \psi^* \left( \frac{t-\tau}{s} \right) dt$
- Inverzní tvar  $x(t) = \frac{1}{C_\psi^2} \int_s \int_\tau \left[ \Psi_x^\psi(\tau, s) \frac{1}{s^2} \psi \left( \frac{t-\tau}{s} \right) \right] d\tau ds$

# Wavelet – diskrétní WT

- <http://users.rowan.edu/~polikar/WTpart4.html>
- Úspora výpočetního času, s kvalitním výsledkem (CWT je redundantní) a možností zpětné transformace
- Změna scale a vzorkovací frekvence mezi úrovněmi výpočtu je ve stejném poměru
- Scale se nejčastěji mění 2,4,8,16 ... (odpovídající počet vzorků/výsledků (závislý od vzorkovací frekvence)  $X$ ,  $X/2$ ,  $X/4$ ...)
- Vzorky odpovídají posunu vlnky v čase (o daný úsek)

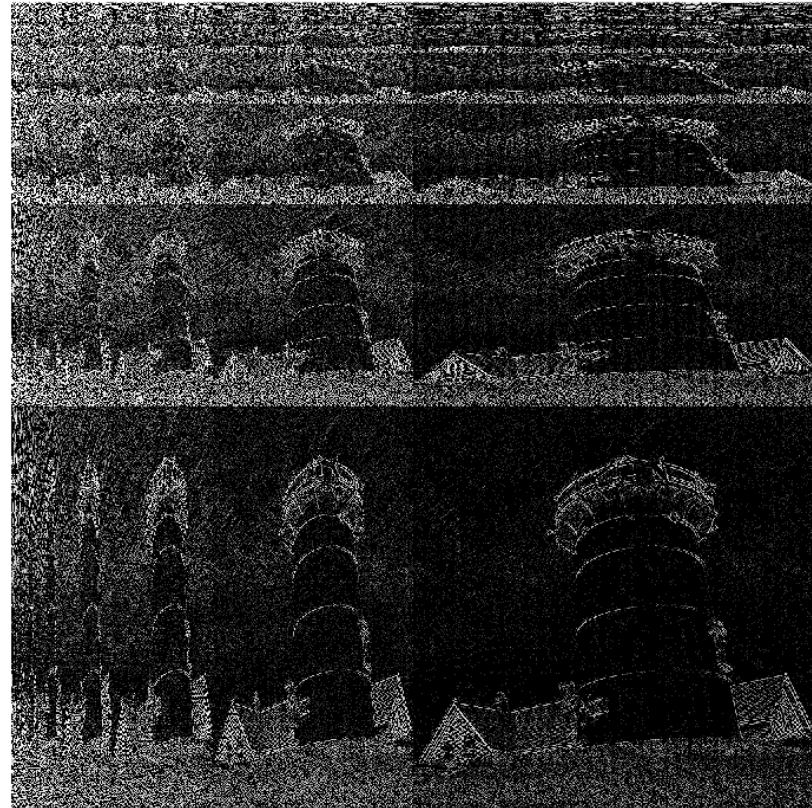
# Wavelet – diskrétní WT

- Realizace pomocí dolno a hornofrekvenčních filtrů – dekompozice, subsampling
- Nejjednodušší – Haarova vlnka (jednoduché a rychlé výpočty)
- Vytvoří se diferenční signál (sousedních hodnot) a součtový signál - pro celou délku signálu (tvar filtru typu Haarova vlnka) – dekompozice signálu do pásem NR 737
- Se součtovým signálem se pokračuje podle předchozích bodů (vyšší frekvence v něm již nejsou díky sumaci přítomny) redukce na poloviční pásmo -> jde zkrátit na polovinu (nyquist) - subsampling
- Další diference je provedena se stejnou vlnkou (ale díky součtu sousedních hodnot a redukci jde vlastně o dvojnásobnou frekvenci).
- Rozdělení na frekvenční pásma (půlením intervalu frekvencí)  
půlí se dolnofrekvenční úsek  
zjistí se vysoké frekvence v celém úseku a vytvoří se dolnofrekvenční úsek v něm už jsou jen frekvence poloviční a menší (a znovu od začátku)



# Wavelet – image processing

- Možnost použít stejně jako FT
- Využití v kompresi signálu – lepší než FT - NR 738
- WT ukázka – zpracování (komplet WT) sloupec – (komplet WT) řádek:

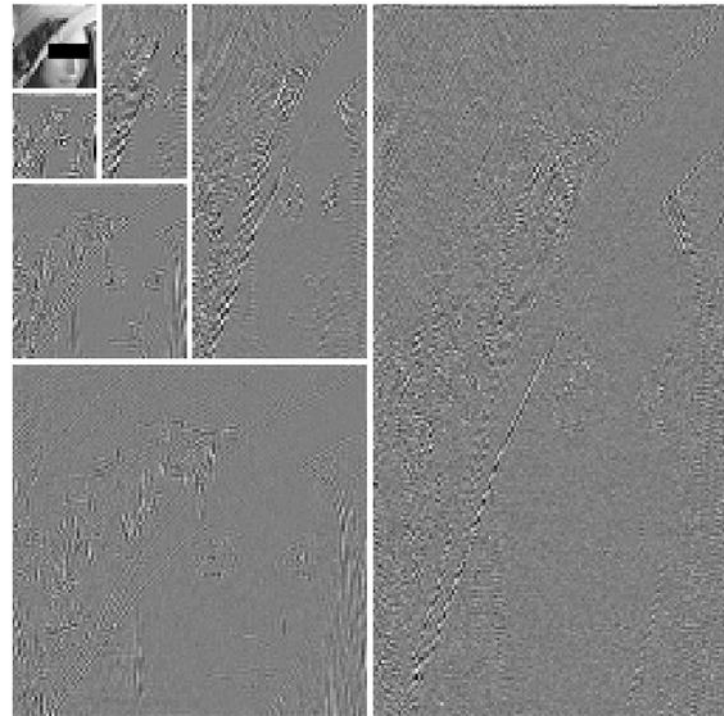


# Wavelet – image processing

- <http://bigwww.epfl.ch/demo/ip/demos/wavelets/>
- Zpracování řádků v  $M \times N \rightarrow$  Low a High každé  $M \times (N/2)$
- Zpracování sloupců v L i H;  $L \rightarrow$  LL a LH;  $H \rightarrow$  HL a HH
- V dalším kroku se zpracovává sekce LL

- Další možnost

[ <https://www.intechopen.com/books/wavelet-theory/the-discrete-quincunx-wavelet-packet-transform> ]



# Detekce malých posunů

- Detekce dýchání, tlukot srdce (změna barvy na základě okysličení krve)
- <https://www.youtube.com/watch?v=rEoc0YoALt0&t=701s>  
(Reveal Invisible Motion With This Clever Video Trick)
- Využívá hledání periodických signálů s malou periodou (rozklad do frekvenčních bank a jejich prohledávání) – využívá se změna ve snímku i mezi po sobě jdoucími snímky

# Literatura

- <http://users.rowan.edu/~polikar/WTtutorial.html>
- [www.wikipedia.com](http://www.wikipedia.com) – příslušná hesla
- [www.nr.com](http://www.nr.com)
- <http://www.wavelet.org/>