

Integrovalná transformace

Transformace

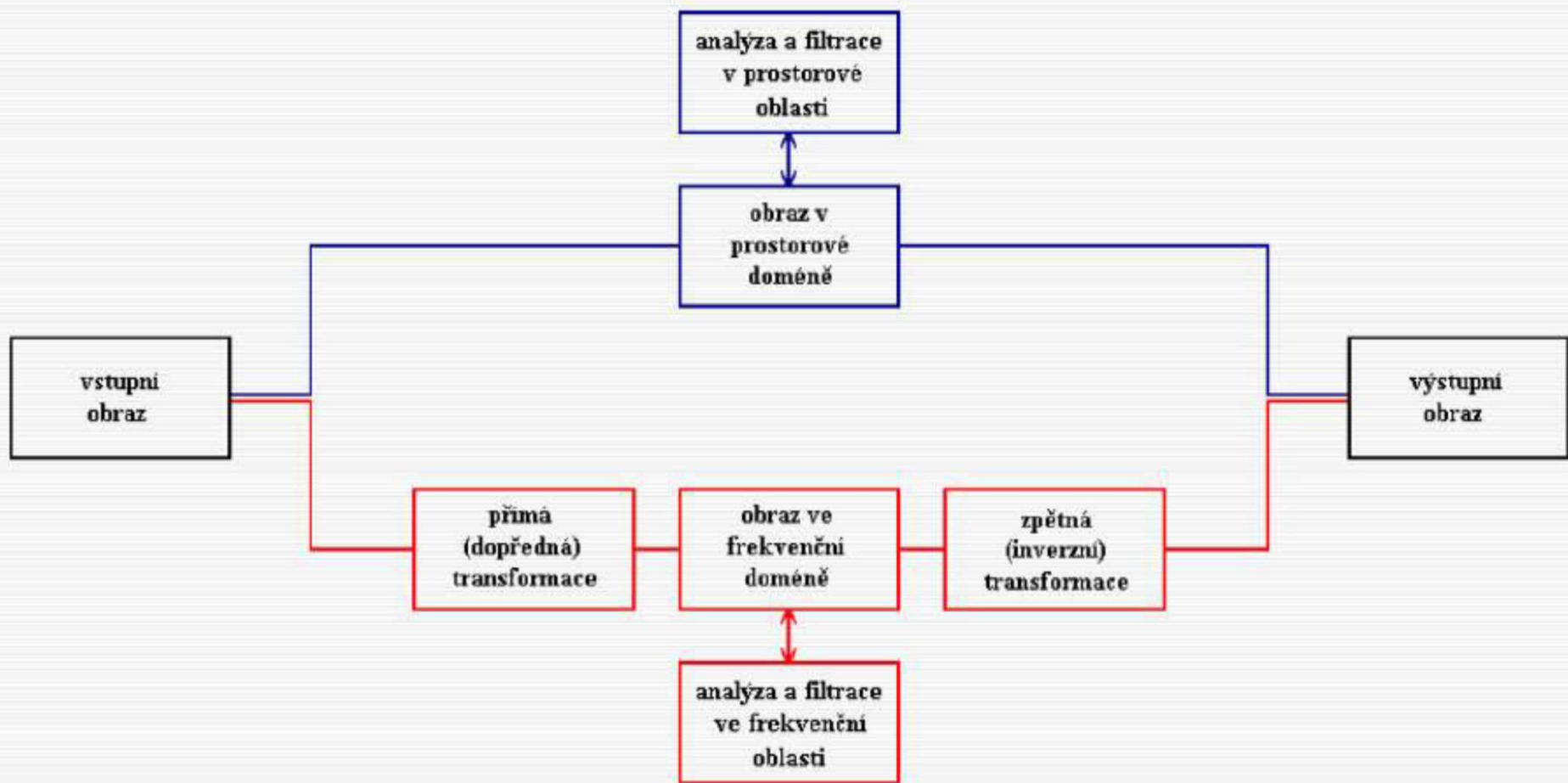
- Transformace – převod signálu podle předpisu
- Lineární splňuje $f(c \cdot u) = c \cdot f(u)$ a $f(u+v) = f(u) + f(v)$
- Přímá a zpětná/inverzní transformace – převod oběma směry
- Bezztrátová tr. – nedochází ke ztrátě informace
- Integrální tr. – lineární bezztrátové operátory převodu; integrál signálu a jádra konvoluce

Vlastnosti Integrálních transformací

- Nevýhoda – nutnost převodů mezi bázemi
- Nevýhoda – pouze lineární operace
- Výhoda – méně náročná realizace konvoluce
- Výhoda – využití pro složitější (větší) filtry (získané například spojením/konvolucí filtrů jiných)
- Výhoda – možnost práce s frekvencemi (odstranění rušení, zjištění podílu šumu ...)
- Lokalizace prostorových x frekvenčních vlastností

Vlastnosti integrálních transformací

- Přímá a zpětná transformace $F(u) = c \cdot \int f(x)\psi(x,u)dx$
- Integrální jádro transformace
(bázová, generující funkce, kernel),
pro inverzi je jiné (ale bývá podobné) $f(x) = C \cdot \int F(u)\psi^{-1}(x,u)du$
– funkce dvou proměnných
- Korekční koeficient C – samotná transformace mění „energii“
- Převod z prostorové domény do prostoru (sumy jednodušších) funkcí tvořících ortonormálních bází



$f(x,y)$



konvoluce



$h(x,y)$

$\frac{1}{273}$

1	4	7	4	1
4	16	26	16	4
7	26	41	26	7
4	16	26	16	4
1	4	7	4	1

filtr s Gaussovým
rozložením 5x5

$g(x,y)$



FOURIEROVA
TRANSFORMACE



$|F(u,v)|$

součin



$|H(u,v)|$

ZPĚTNÁ
FOURIEROVA
TRANSFORMACE



$|G(u,v)|$



Typy integrálních transformací

- Fourierova řada
- Fourierova transformace - frekvenční spektrum signálu ($p=j\omega$)
- Laplaceova transformace – obecnější popis (tlumený frekvenční signál $p = a+j\omega$)
- Short Time FT – provádění FT po částech signálu
- Wavelet – vlnky – prostorově frekvenční popis

Fourierova řada

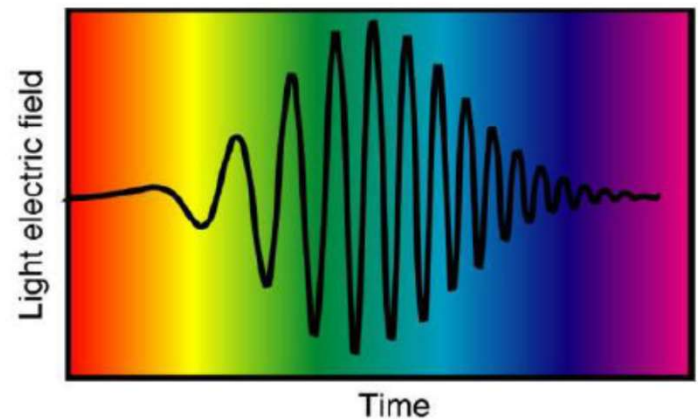
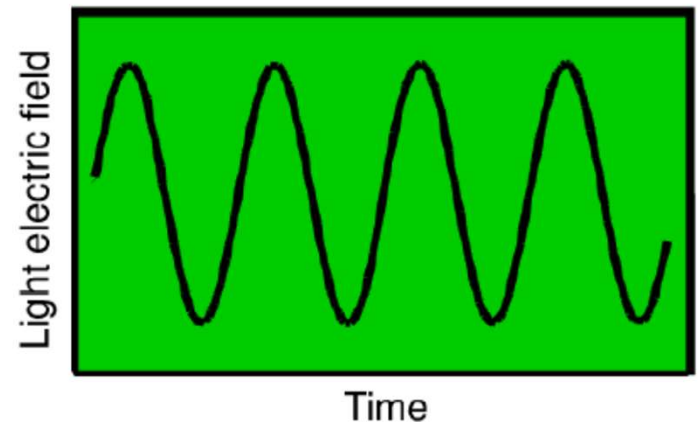
- Periodické spojité signály $\rightarrow$ diskrétní neperiodické spektrum
- Předpoklad, že harmonická složka působí po celou dobu periody

Fourierova Transformace - charakteristika

- Vzorce 1D

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot (\cos(\omega t) - i \cdot \sin(\omega t)) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

- Vhodný a nevhodný signál pro převod FT
- Výsledná frekvence působí v celém rozsahu x prostorové domény
- Periodicita signálů $f(a) = f(a+T)$



FT

- Přímá a zpětná, spojitá, diskretní, nesymetrická

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

$$F(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \cdot e^{-i\Omega k}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega$$

$$f(k) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{\Omega=-\infty}^{\infty} F(\Omega) \cdot e^{i\Omega k}$$

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}$$

$$FS(\Omega) = \mathcal{F}\{f(k)\}$$

$$f(k) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\Omega)\}$$

FT

- Disktrétní FT pomocí poměrů frekvence – pro délku N vzorků

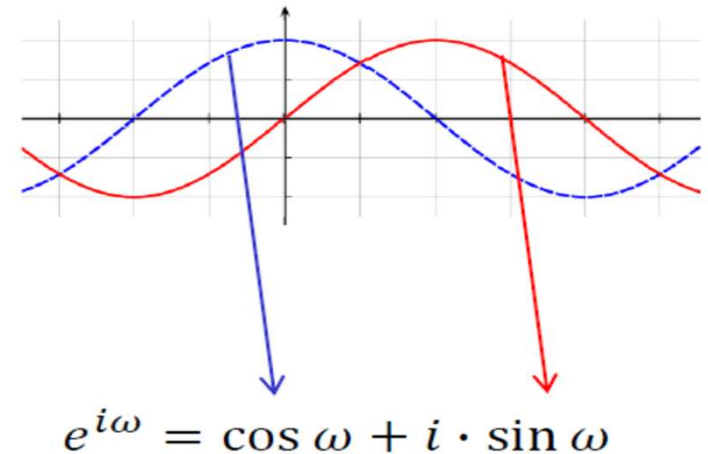
$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \cdot e^{\frac{-2\pi i \cdot k \cdot n}{N}}$$

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) \cdot e^{\frac{2\pi i \cdot k \cdot n}{N}}$$

- Obraz dirakova pulzu a konstantního signálu = ?

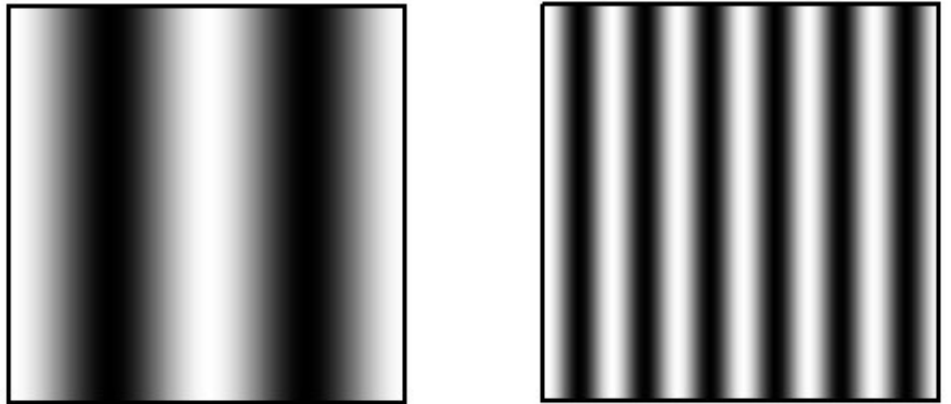
Vlastnosti

- Ss složka (čára) se zobrazí na bod, bod (dirak) se zobrazí na čáru (tj. šum je čára -> širokospektrální)
- Energie (nepřesně „spektrum“) : $E\{F(w)\} = |F(w)|^2$
- Spektrum symetrické $F(w) = F^*(-w)$
- $|F(w)|$ je sudá
- $\text{Arg}\{F(w)\}$ je lichá
- Periodizace spektra i signálu
Periodický diskretní $\Leftrightarrow$ periodický diskretní



FT ve 2D

- Generující funkce



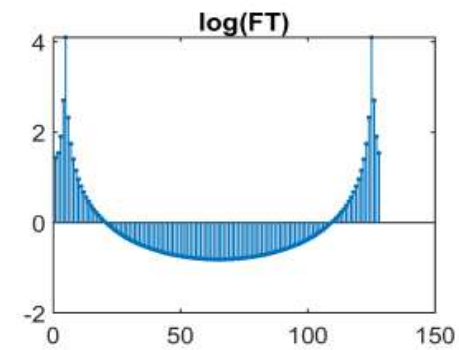
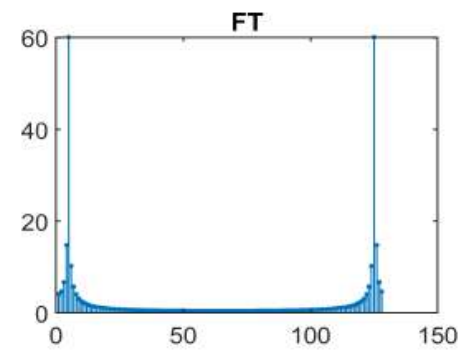
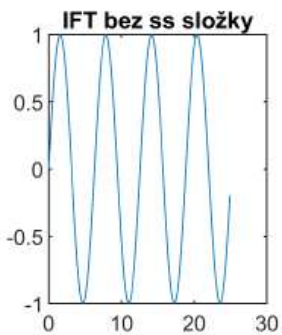
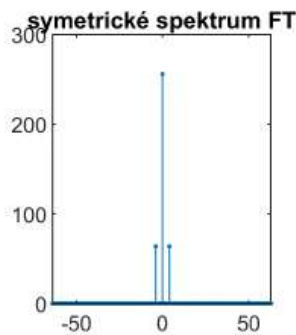
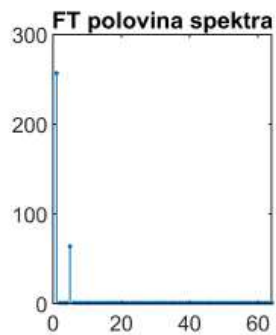
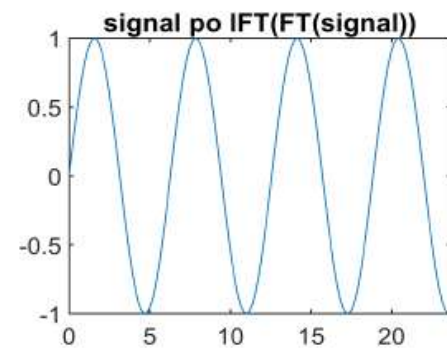
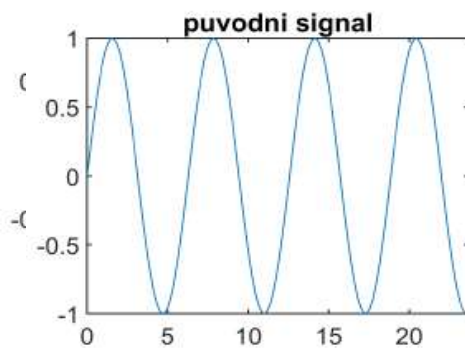
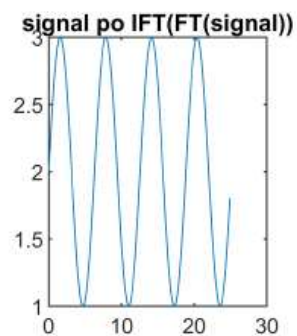
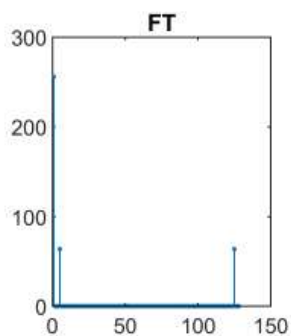
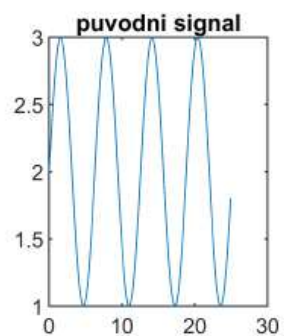
- Pokud je signál periodický s periodou rovnou celočíselnému podílu k délce, je výstupem jedna frekvenční čára

FT – 1D a 2D vzorce

- Diskrétní varianty 2D
- Složky jsou vlny (celková délka je celočíselný násobek jejich periody)
- Jádro je funkce $\exp = \cos + j \sin$
- Pro sudé funkce zůstanou jen $\cos$ členy, pro liché funkce pouze $\sin$ (ve spektru jsou nuly $\rightarrow$ špatná rekonstrukce signálu)
- $F(t) = F(-t)$ a $F(t) = -F(-t)$
- Symetrie výsledku –
- z definice symetrický výpočet, reálně počítáno v kladných souřadnicích (úprava pomocí posunu – funkce shift)

Reprezentace dat FT

- Zobrazení výsledné FT 1D a 2D
- Paměťová náročnost – komplexní čísla
- Amplituda, fáze, shift vypočtených hodnot, reálná a imaginární složka, zobrazení, logaritmy pro změny citlivosti rozsahu



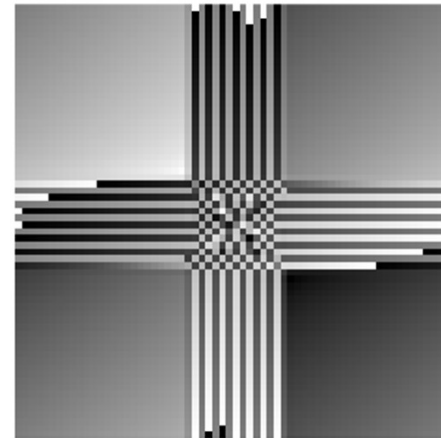
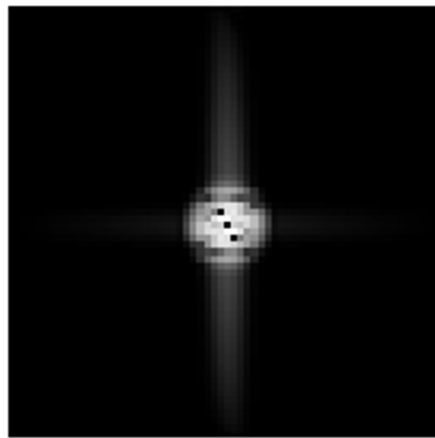
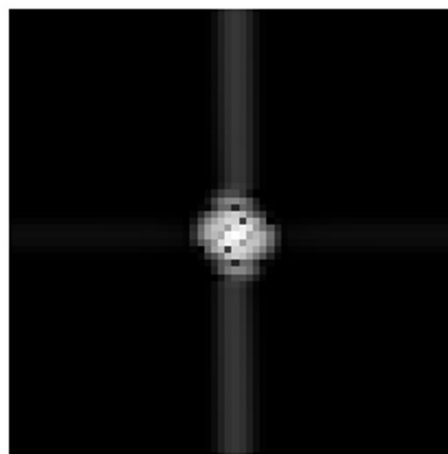
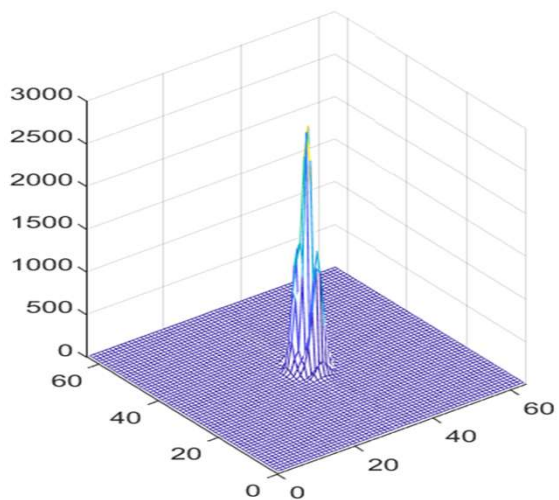
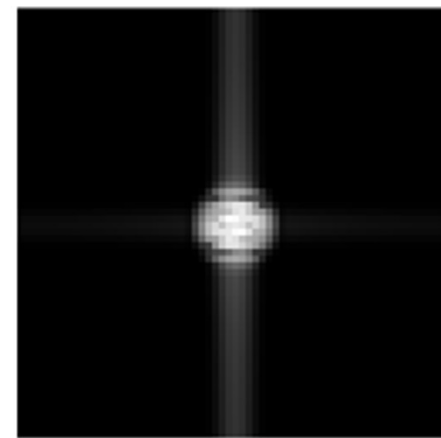
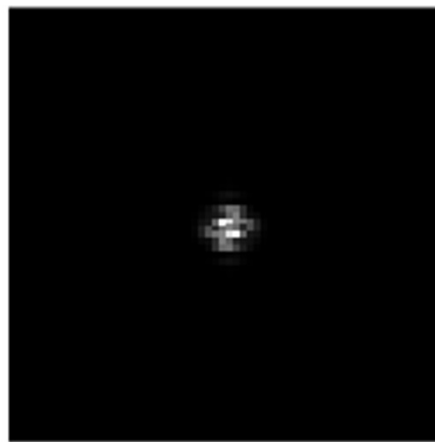
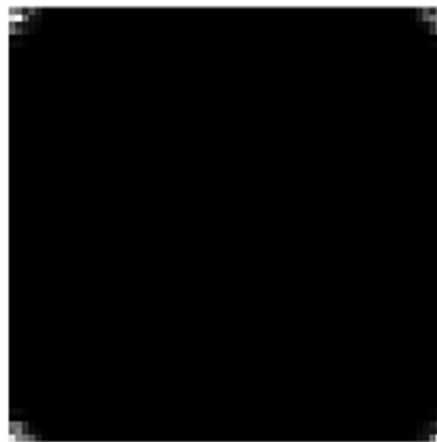
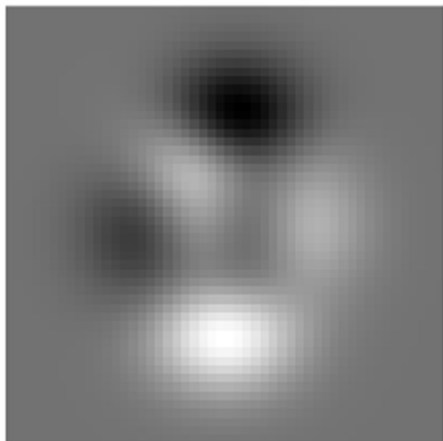
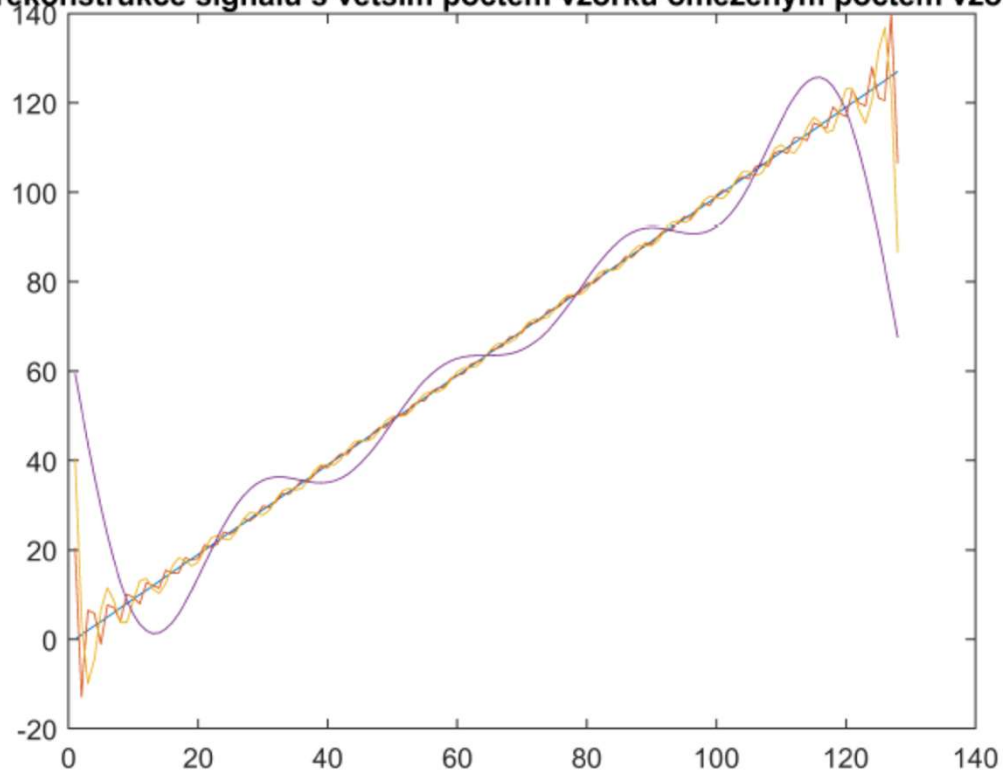


Image / A / shift A / shift $\log A$

A / real A / imag A / fáze A

rekonstrukce signálu s větším počtem vzorků omezeným počtem vzorků

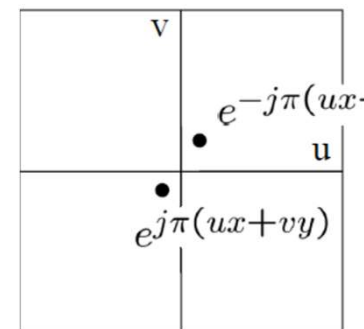


- Přechody na okrajích (způsobené periodicitou)

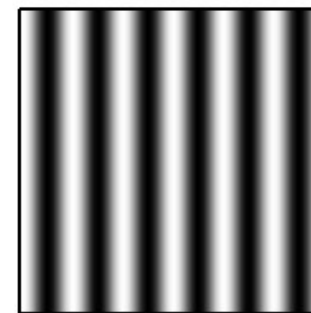
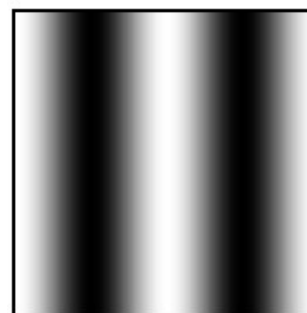
Fourierova Transformace - charakteristika

- Vzorce 2D – separabilní – dva 1D algoritmy (pro řádky a sloupce)

$$e^{j2\pi(ux+vy)} = \cos 2\pi(ux + vy) + j \sin 2\pi(ux + vy)$$



- Prostorové souřadnice $f(x, y)$ -> prostorové frekvence $F(u, v)$



•

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{y=0}^{M-1} \sum_{x=0}^{N-1} f(x, y) \cdot \exp\left(\frac{-2\pi i \cdot x \cdot u}{N} + \frac{-2\pi i \cdot y \cdot v}{M}\right)$$

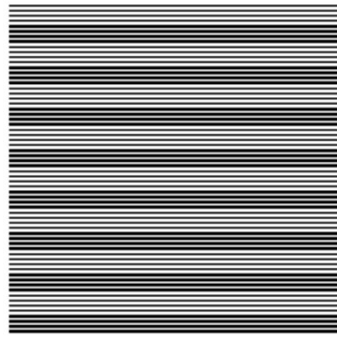
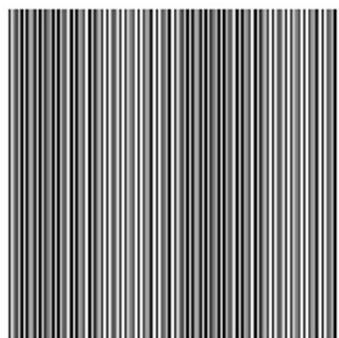
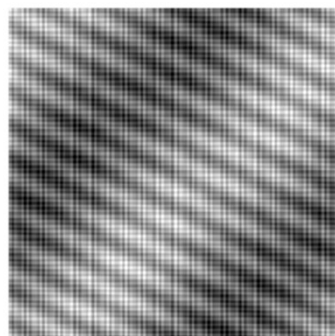
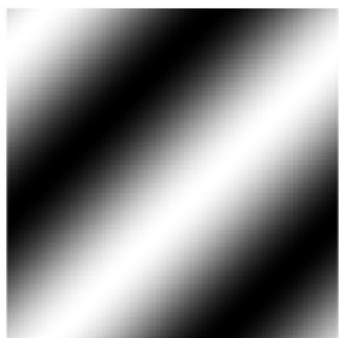
$F(u, v)$... frekv. spektrum obrazu
 u, v ... frekvenční souřadnice
 M, N ... rozměry obrazu
 $f(x, y)$... obrazová funkce

$$f(x, y) = \sum_{v=0}^{M-1} \sum_{u=0}^{N-1} F(u, v) \cdot \exp\left(\frac{2\pi i \cdot x \cdot u}{N} + \frac{2\pi i \cdot y \cdot v}{M}\right)$$

$$F(u, v) = \frac{1}{M} \sum_{y=0}^{M-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x, y) \cdot \exp\left(\frac{-2\pi i \cdot x \cdot u}{N}\right) f(x, y) \right] \exp\left(\frac{-2\pi i \cdot y \cdot v}{M}\right)$$

Generující funkce – prostorová frekvence

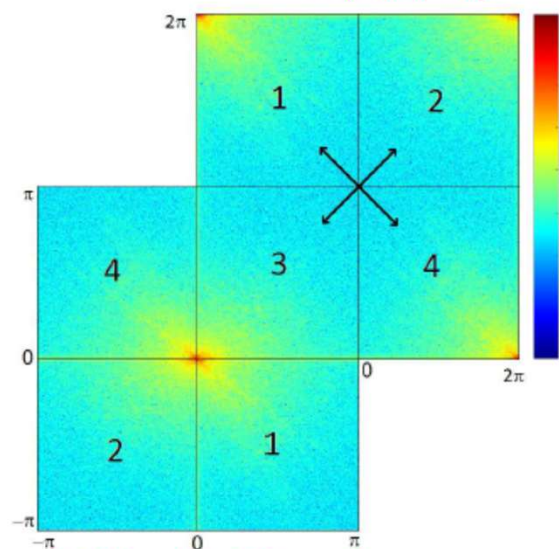
- Jednotlivé složky, součet + konstanta a výsledné spektrum



$f(x, y)$

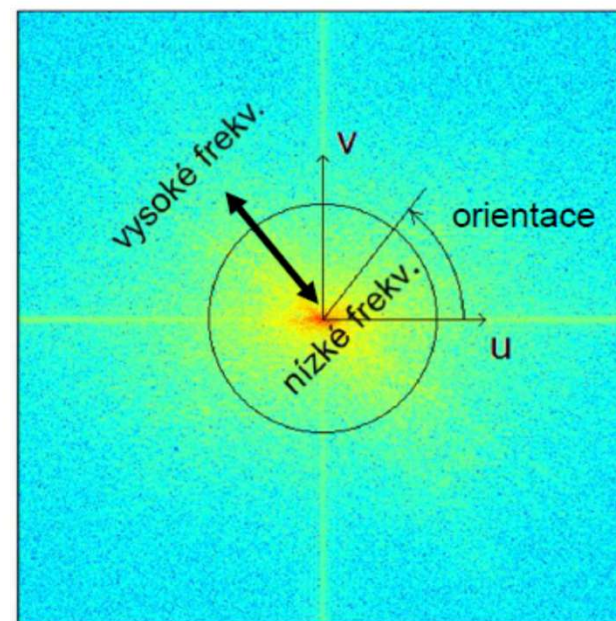


$\ln|F(u, v)|$

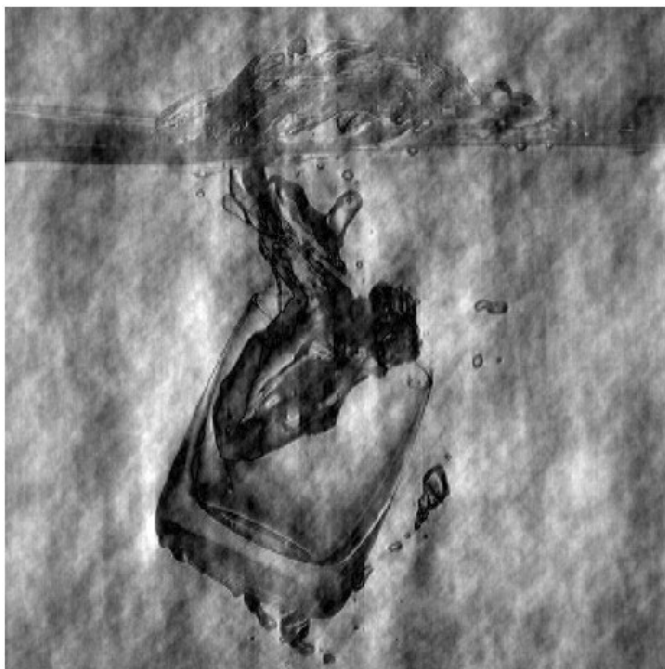


$\text{Shifted } \ln|F(u, v)|$

$\text{Shifted } \ln|F(u, v)|$



Vliv fáze a amplitudy na výsledný obraz



- Amplituda a fáze z rozdílných snímků – kde je amplituda z Leny?

Vliv reálné a imaginární složky

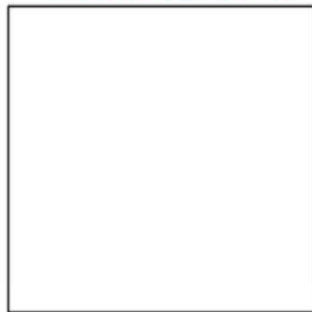


- Rekonstrukce z reálné a imaginární složky spektra

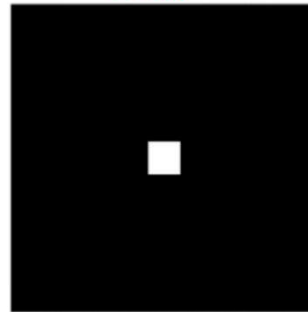
$f(x,y)$



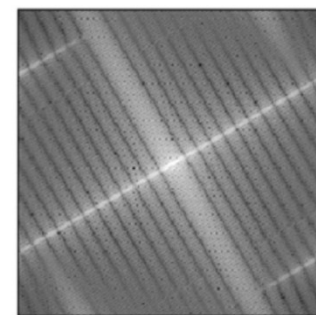
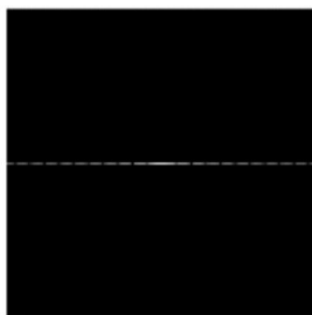
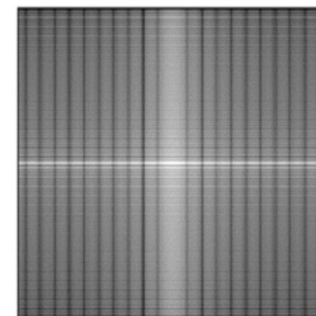
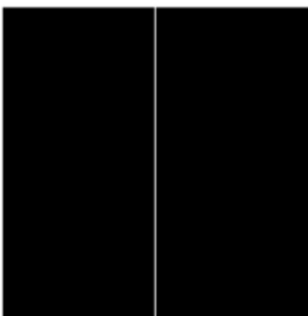
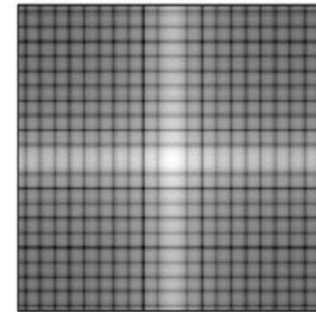
shifted $\ln|F(u,v)|$



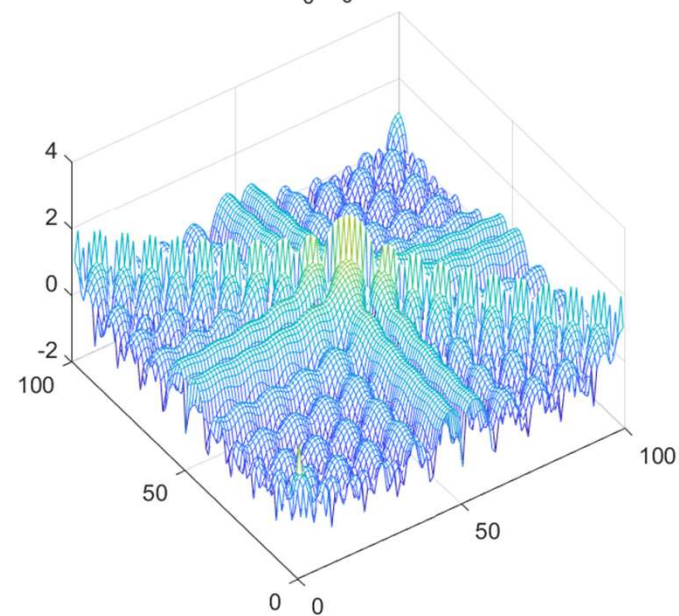
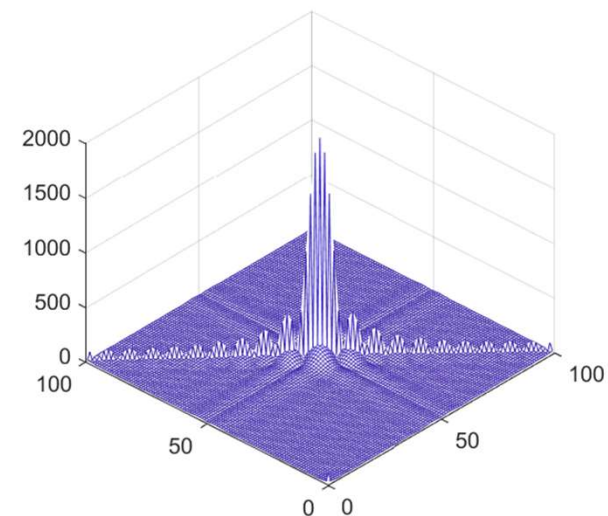
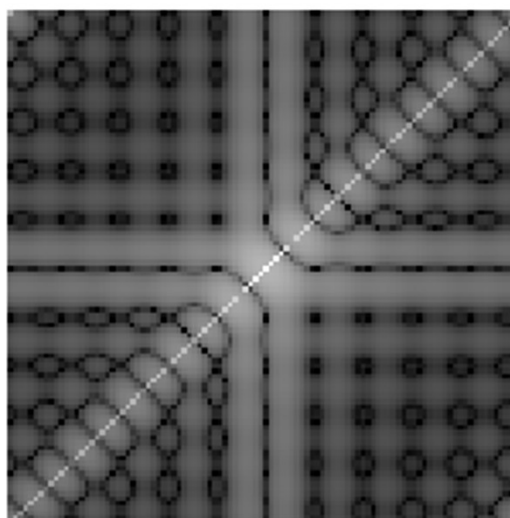
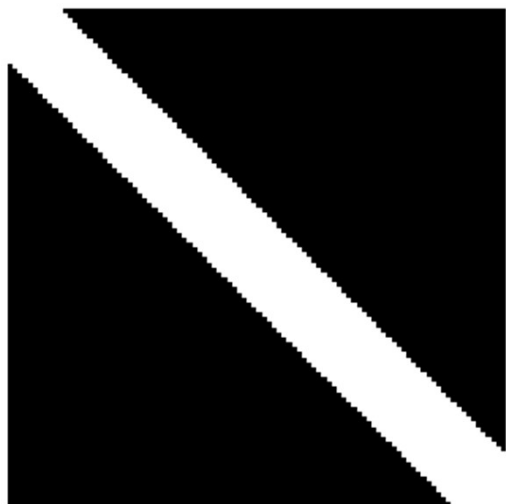
$f(x,y)$



shifted $\ln|F(u,v)|$



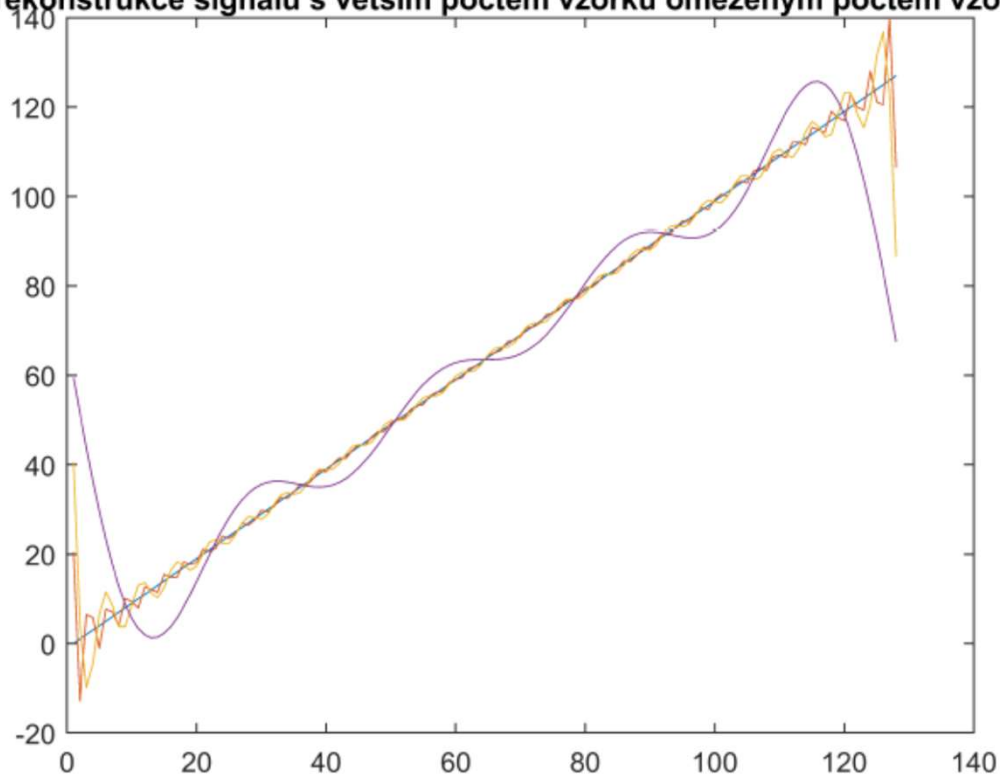
Přechody na krajích obrazu



FT frekvenční vlastnosti

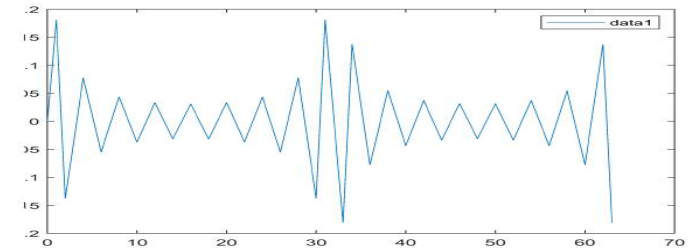
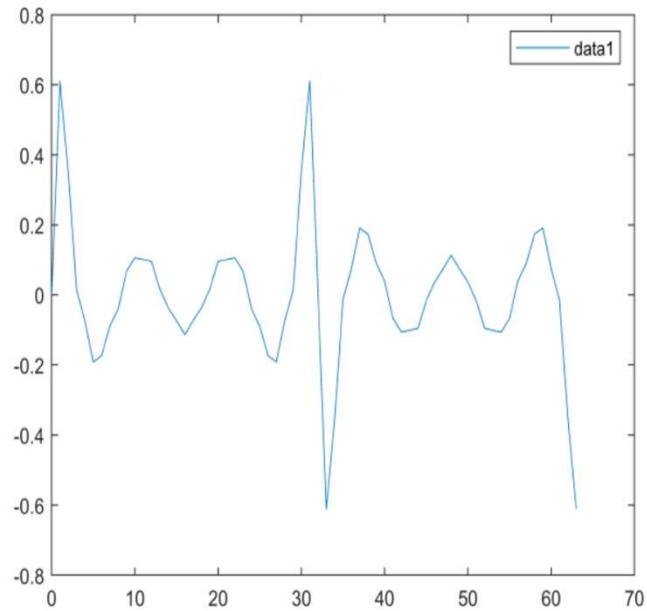
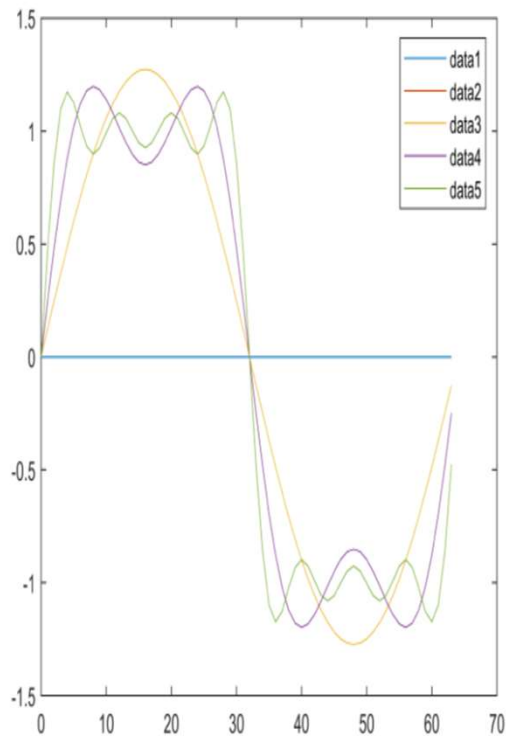
- Podíl frekvencí na tvorbě hrany – zpětné skládání z prvních X harmonických (superpozice)

rekonstrukce signálu s větším počtem vzorků omezeným počtem vzorků



FT frekvenční vlastnosti

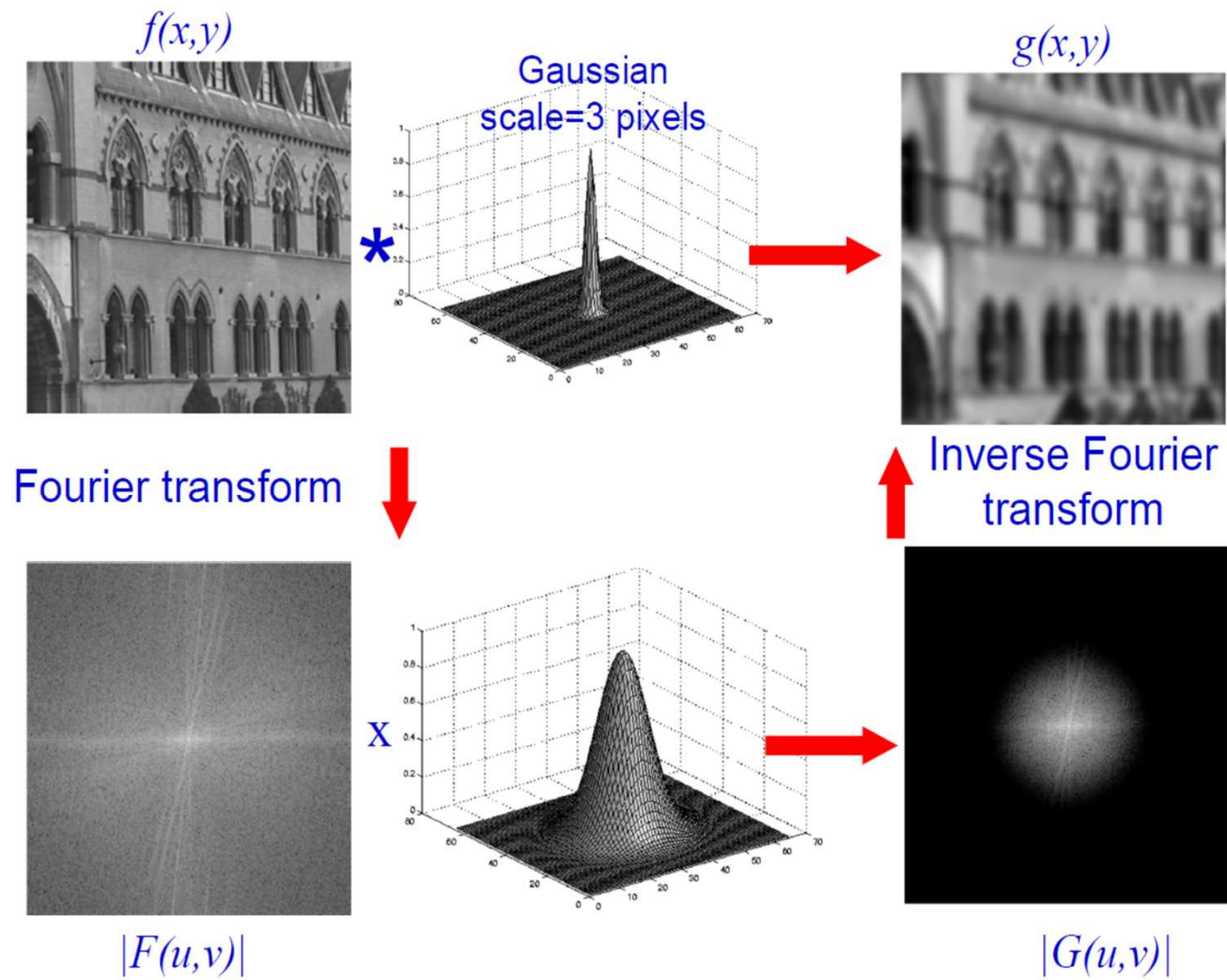
- Podíl frekvencí na tvorbě hrany – obdélník (sudý, lichý, obecný) a zpětné skládání z prvních X harmonických (superpozice)
- Dolní, střední a horní frekvence – co jim odpovídá v obraze, směrovost, Siemens Star



- Části spektra tvořící obraz – nízké střední a vysoké frekvence

filter

•



FT filtry

- Potlačení nebo zvýraznění určitého charakteru dat – úprava spektra
- Tvorba filtrů a jejich vlastnosti
- Gauss, laplace, Spacek, canny
- Filtrace šumu (tj vyšších frekvencí) -> rozmazání (ostrých hran)
- FT pouze lineární filtry
- Lineární, komutativní, asociativní – filtry lze spojit do jednoho, nezáleží na pořadí filtr, obraz; lze měnit pořadí uplatnění filtrů,

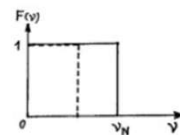
Tvorba Filtrů

- Filtry by neměly mít ostré hrany – obrazem je (tvarově) sinc (tj. obdélníkový filtr se rozprostře přes celý snímek)
- Vhodné jsou filtry odvozené od Gaussové křivky. Další používané tvary Bessel, Čebyšev, Butterworth, oknové funkce
- Při filtraci je problémem periodicitu signálu. To vlastně znamená, že protilehlé okraje sousedí. Při zpracování tedy nastává přesah filtrů přes okraje a tedy zkreslení výsledků (v rámci těchto přesahů).
- Výsledné krajní hodnoty budou vždy nepřesné (filtr zasáhne mimo oblast reálných dat). Řešení:
 - na výstupu - vypustit části ovlivněné prolnutím filtru přes okraj.
 - na vstupu - zvětšit obrázek a doplnit ho – padding (doplní se nulami, opakují se krajní hodnoty, nebo plynulý přechod mezi okraji).

Nr 13.1.1/668

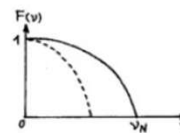
Filtry tvary

• **Dolnofrekvenční (low-pass) filtry** - pro nízké frekvence má hodnotu blízkou 1 a pro vysoké frekvence dosahuje nebo se blíží k nule



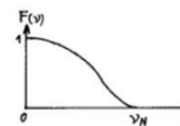
OBDÉLNÍKOVÝ

$$F(v) = \begin{cases} 1, & v \leq v_N \\ 0, & v > v_N \end{cases}$$



KOSÍNOVÝ

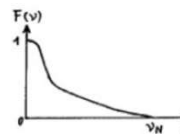
$$F(v) = \begin{cases} \cos \frac{\pi v}{v_N}, & v \leq v_N \\ 0, & v > v_N \end{cases}$$



HAMMING

$$F(v) = \begin{cases} \alpha + (1 - \alpha) \cdot \cos \frac{\pi v}{v_N}, & v \leq v_N \\ 0, & v > v_N \end{cases}$$

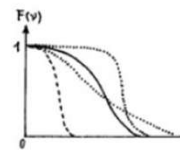
α – form faktor ($0 \leq \alpha \leq 1$)



PARZEN

$$F(v) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{v}{v_N}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{v}{v_N}\right), & v \leq v_N/2 \\ 2 \left(1 - \frac{v}{v_N}\right)^3, & v_N/2 \leq v \leq v_N \\ 0, & v > v_N \end{cases}$$

polynom 2. a 3. stupně



BUTTERWORTH

$$F(v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{v}{v_N}\right)^{2n}}$$

n – řád (form-faktor) – určuje strmost filtru

v_N ... „cutoff“

plnou čarou ... slabší filtr

čárkovanou čarou ... silnější filtr



Síla filtrace je nepřímo úměrná ploše pod grafem filtru ve frekv. oblasti

Další filtry např.:

- Gaussian,
- Chebyshev,
- Bessel
- ...

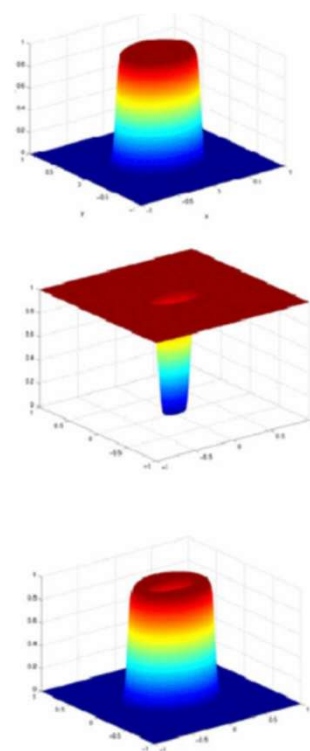
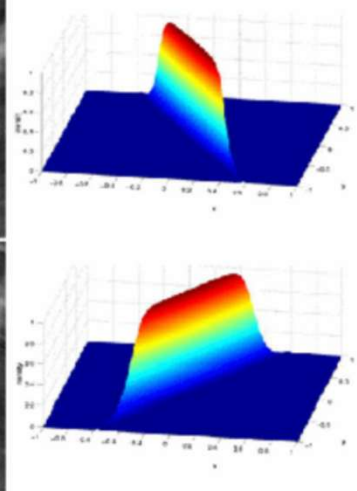
1D → 2D

Převzato z:

<http://astronuklfyzika.cz/Filtry.htm>

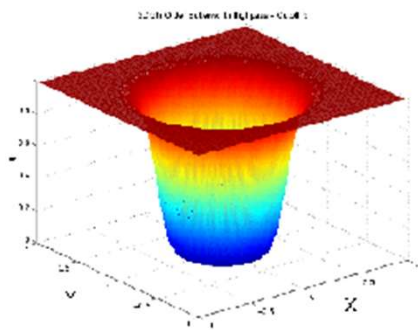
Tvorba filtrů ve frekvenční oblasti

-

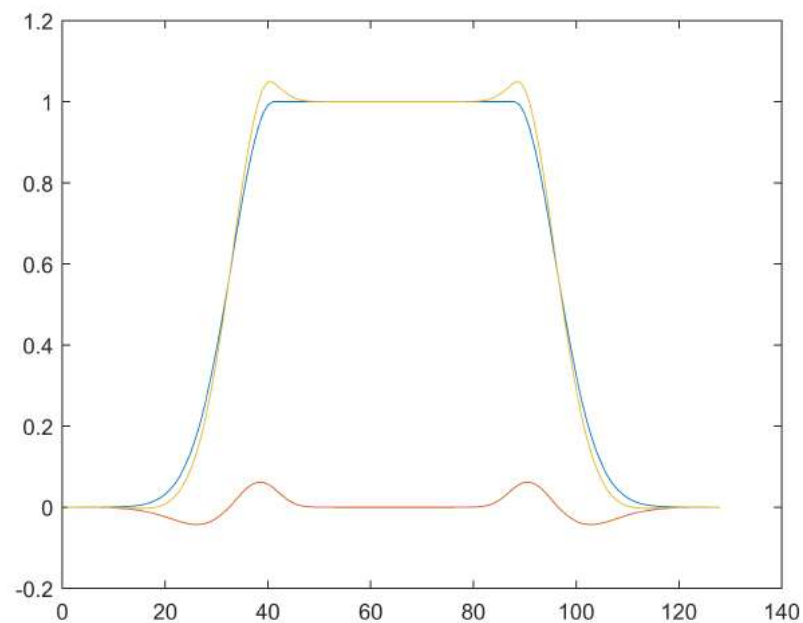
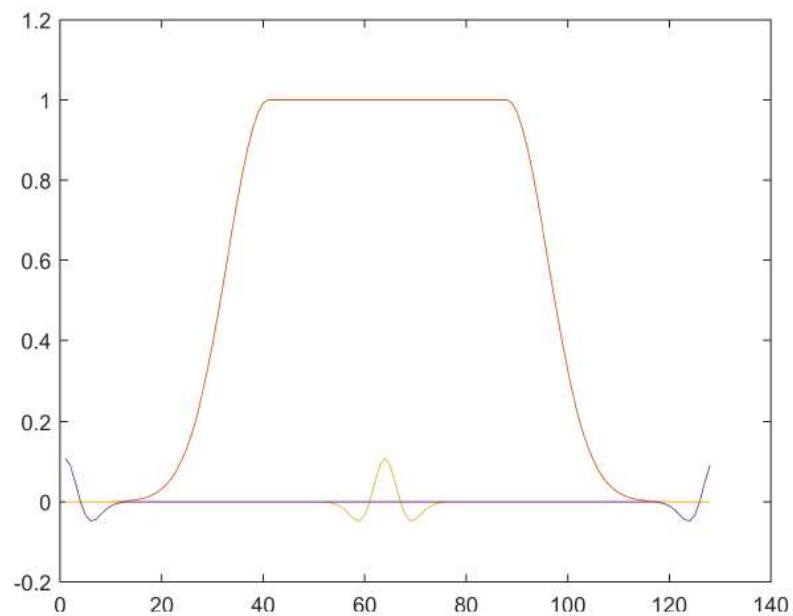


Tvorba filtrů ve frekvenční oblasti

-

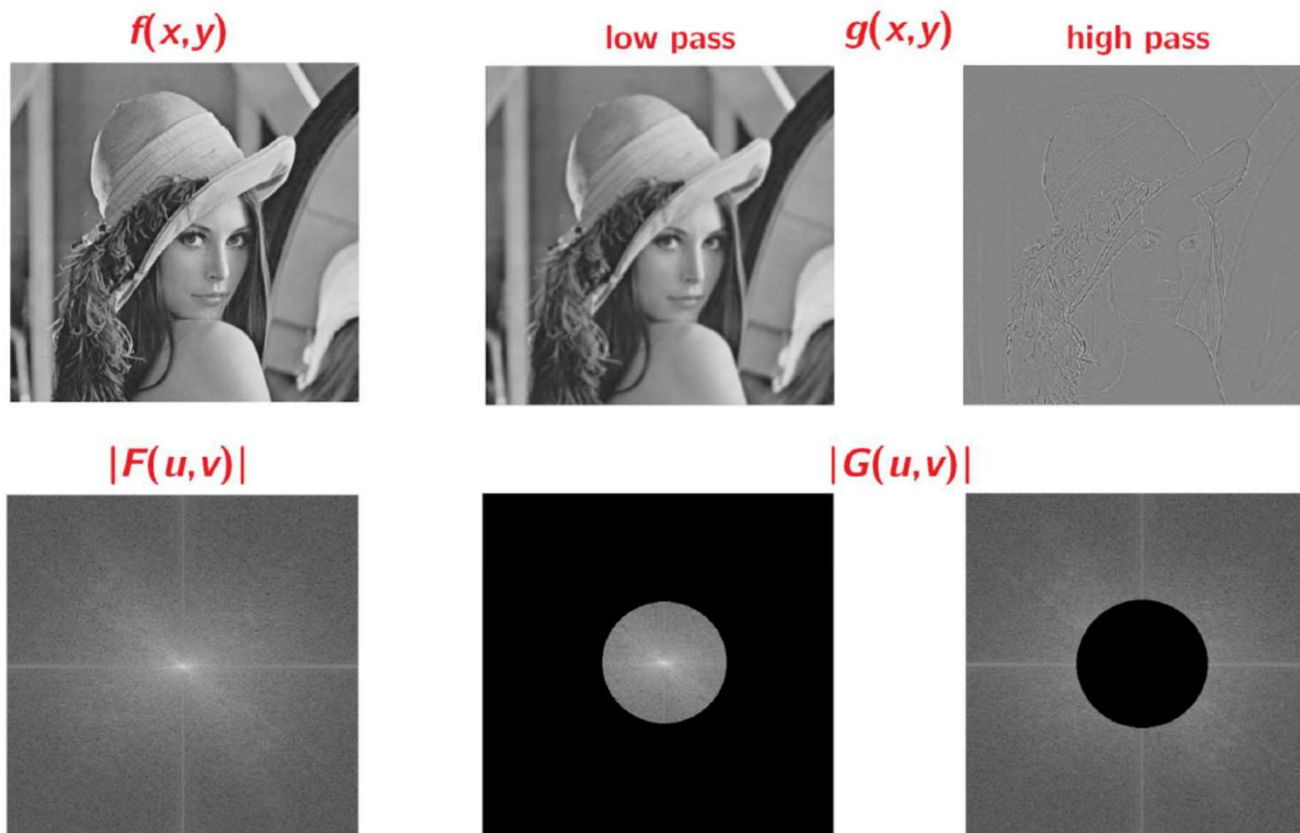


Zvýraznění hran (kontrastu)



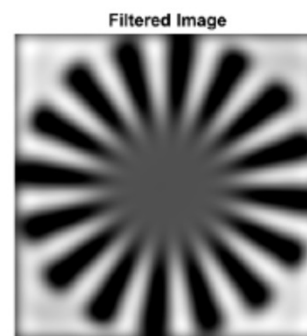
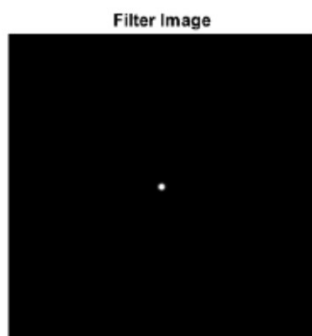
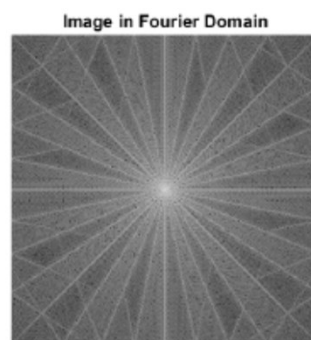
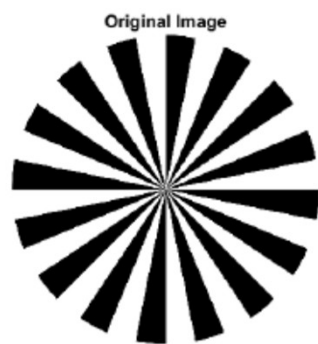
- Signál a filtr; výsledný signál a jeho složky

Rozložení ve spektru



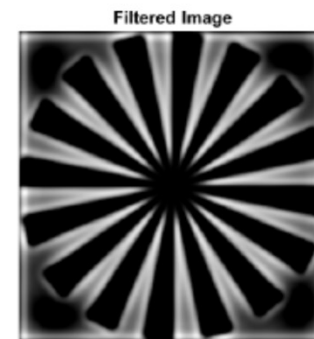
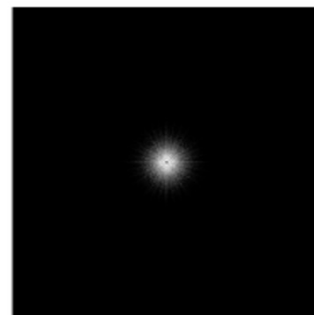
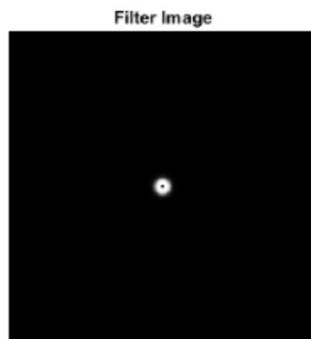
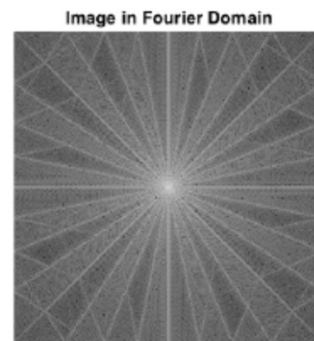
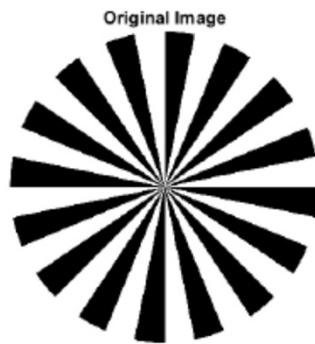
SS a nízké frekvence

-



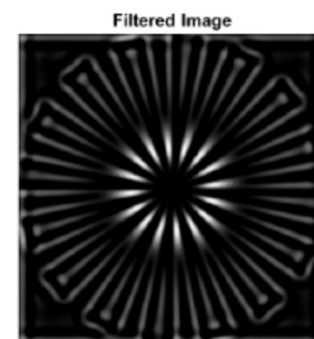
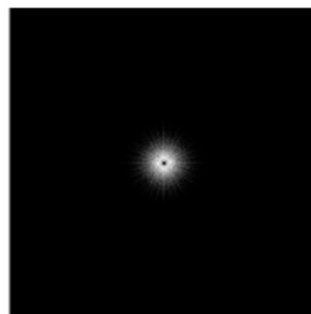
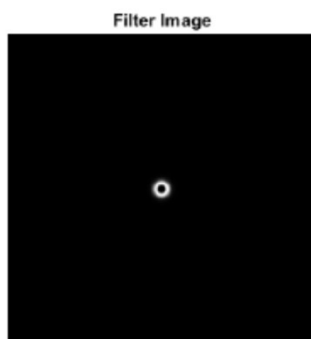
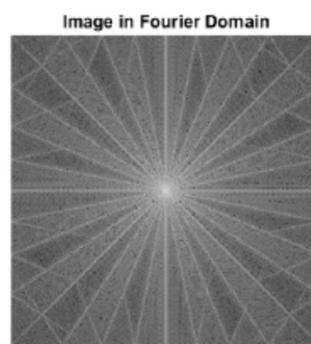
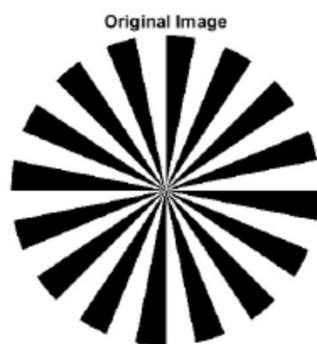
Nižší a střední frekvence

-



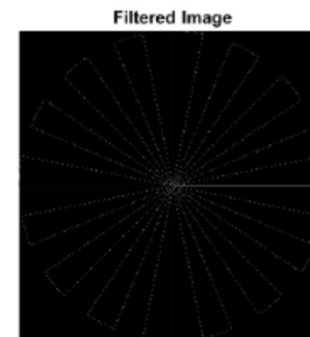
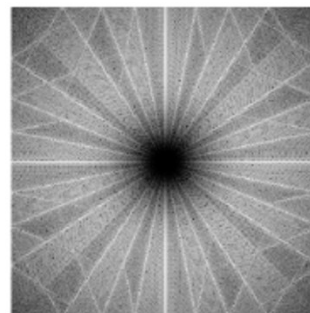
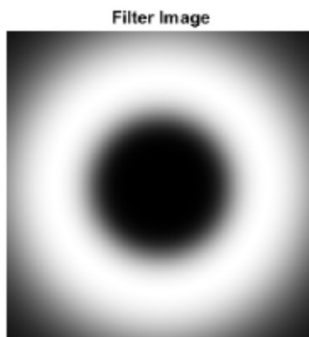
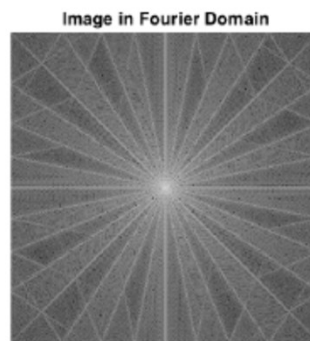
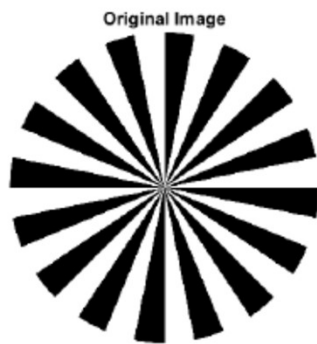
Střední frekvence

-



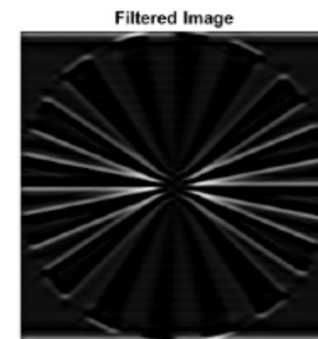
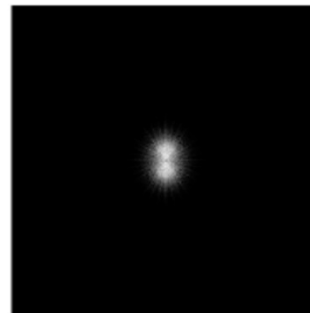
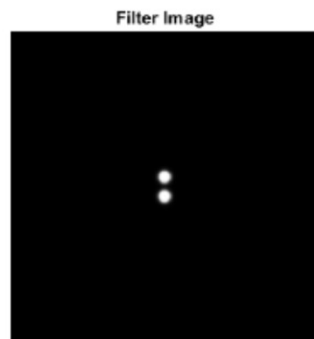
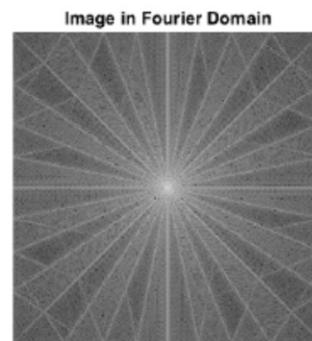
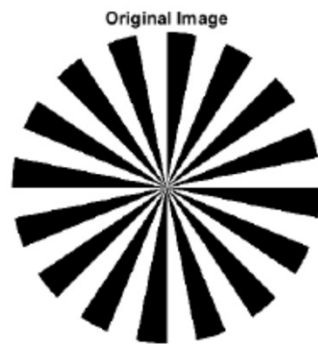
Vysoké frekvence

-



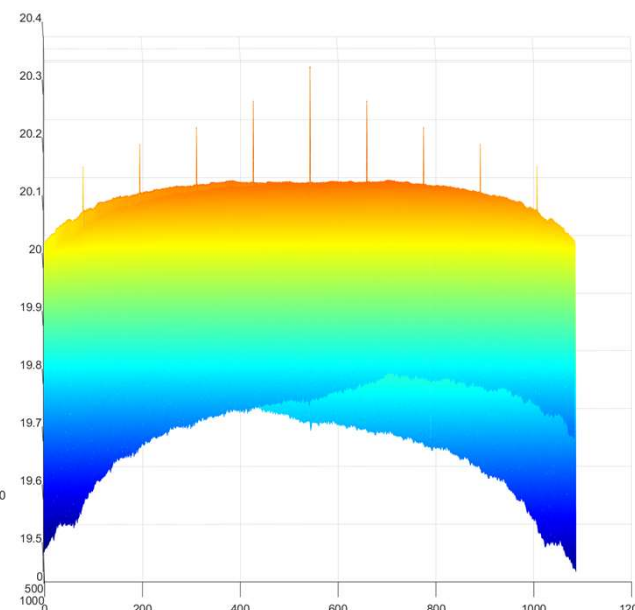
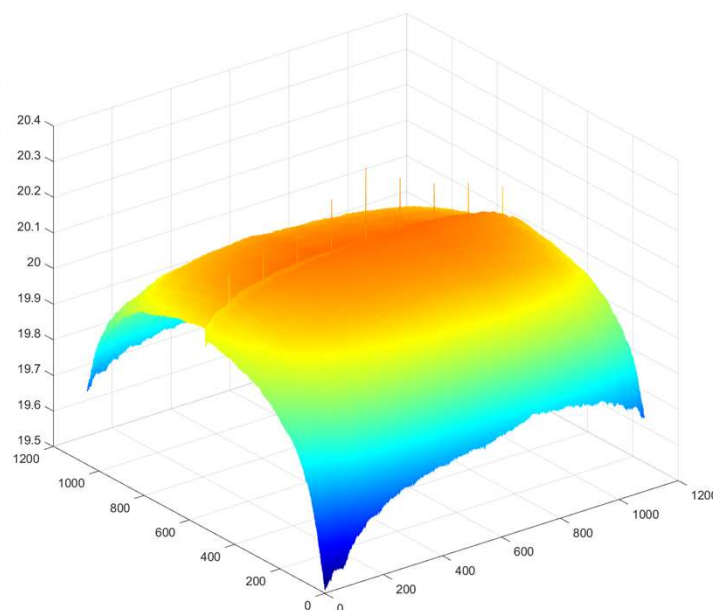
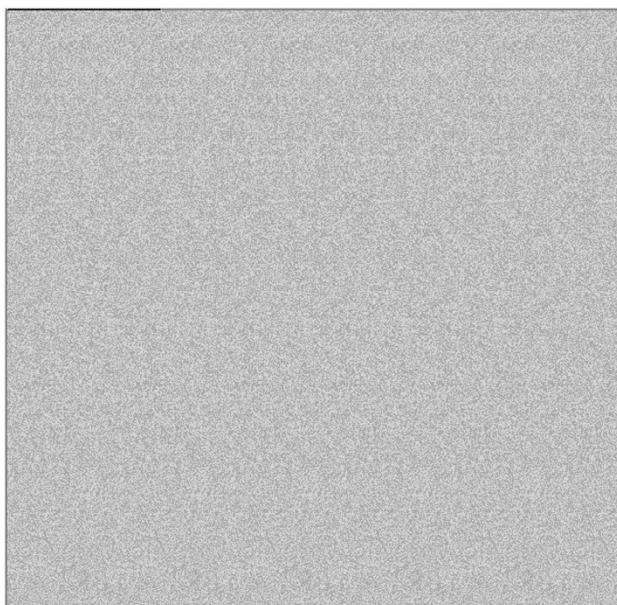
Pásmový, směrový filtr

-

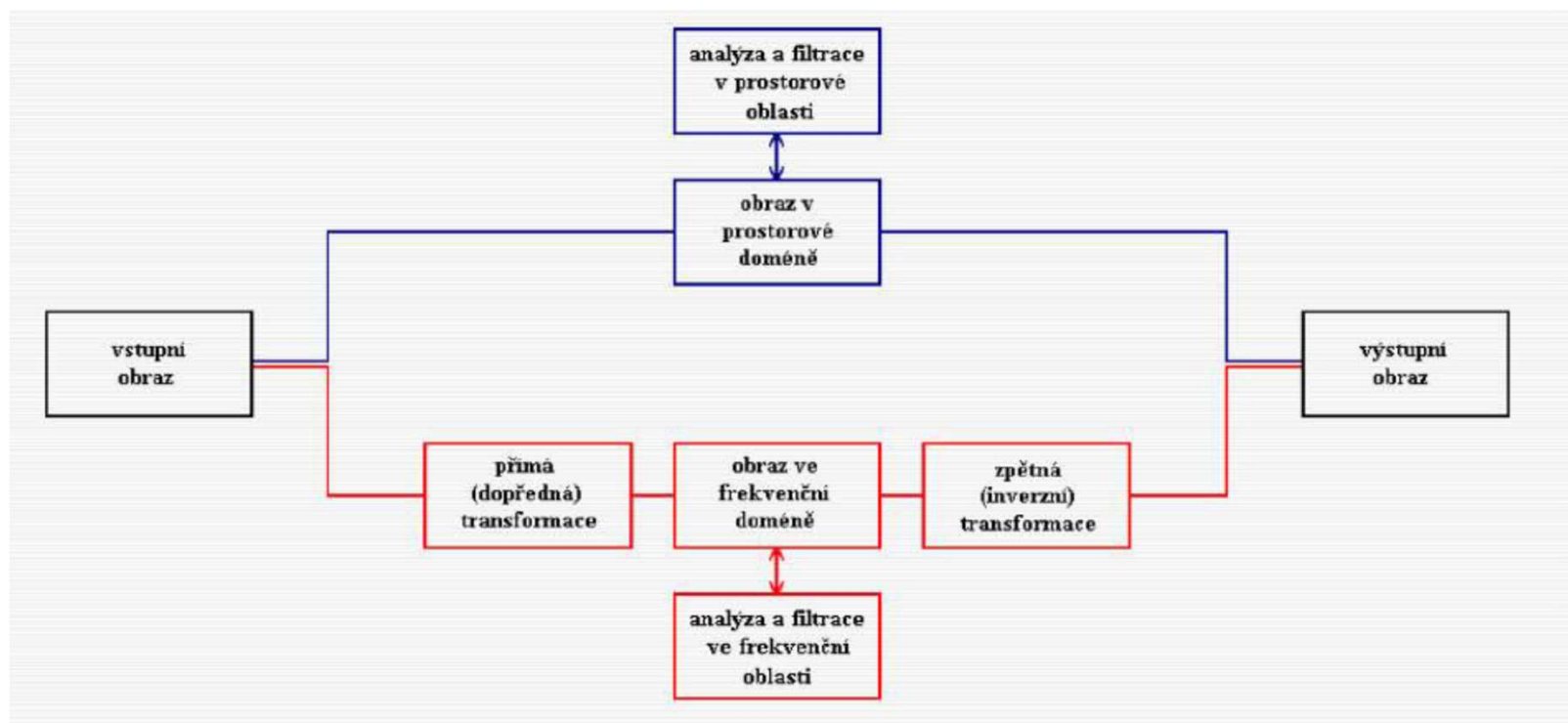


FT autokorelace

- Hledání periodicity signálu proti sobě (obr*obr)
- Větší posun -> nižší počet bodů -> nižší hodnota -> normalizace



Kdy použít FT oproti prostorové doméně?



Rychlá realizace FFT

- Standardní DFT má $O(N^2)$
- FFT má $N \cdot \log_2(N)$
- FFTW knihovna používá další optimalizace a pracuje s libovolným rozměrem

Změna měřítka a posun

- Similarity

$$f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{ab} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right).$$

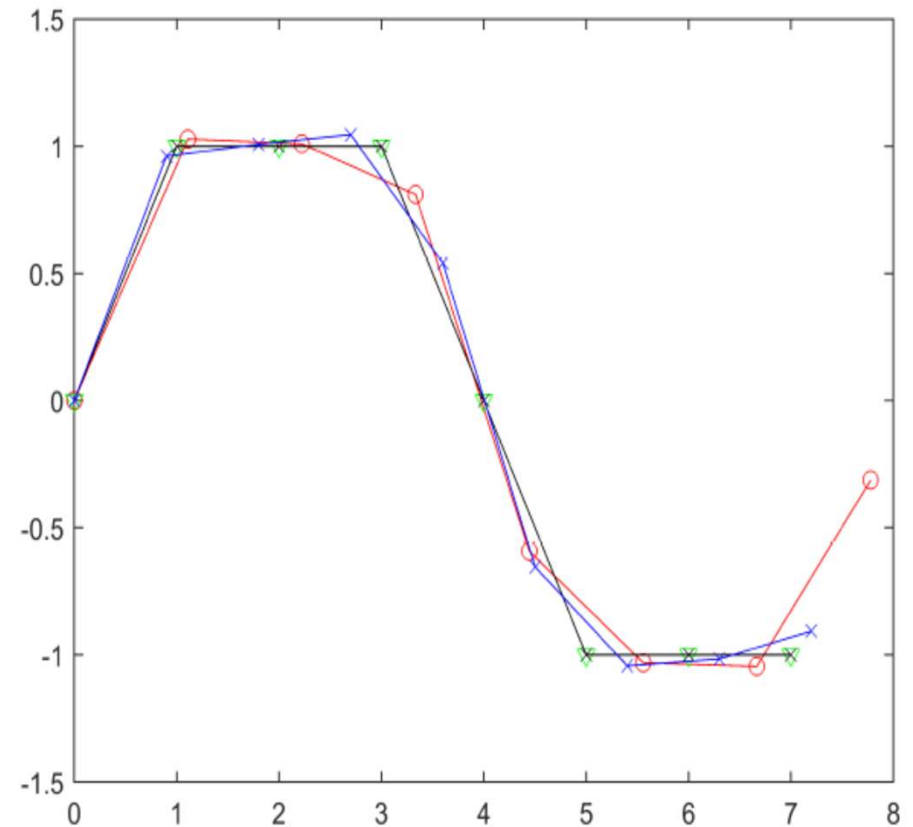
This applies, for example, when an image is scaled

- Shift

$$f(x-a, y-b) \Leftrightarrow e^{j2\pi(au+bv)} F(u, v)$$

Vzorkování, interpolace

- Převzorkování signálu
- V ne/násobcích periody
- Přidání členů nebo doplnění nulami
- pomocí FT – z definičního vzorce
- Obr. – zeleně originální průběh;
modrá a červená – prodloužení



Obdélník a gauss - obrazy

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \int \int f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy, \\ &= \int_{-X/2}^{X/2} e^{-j2\pi ux} dx \int_{-Y/2}^{Y/2} e^{-j2\pi vy} dy, \text{ separabi} \\ &= \left[\frac{e^{-j2\pi ux}}{-j2\pi u} \right]_{-X/2}^{X/2} \left[\frac{e^{-j2\pi vy}}{-j2\pi v} \right]_{-Y/2}^{Y/2}, \\ &= \frac{1}{-j2\pi u} [e^{-juX} - e^{juX}] \frac{1}{-j2\pi v} [e^{-jvY} - e^{jvY}], \\ &= XY \left[\frac{\sin(\pi Xu)}{\pi Xu} \right] \left[\frac{\sin(2\pi Yv)}{\pi Yv} \right] \\ &= XY \text{sinc}(\pi Xu) \text{sinc}(\pi Yv). \end{aligned}$$

$$f(r) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2}$$

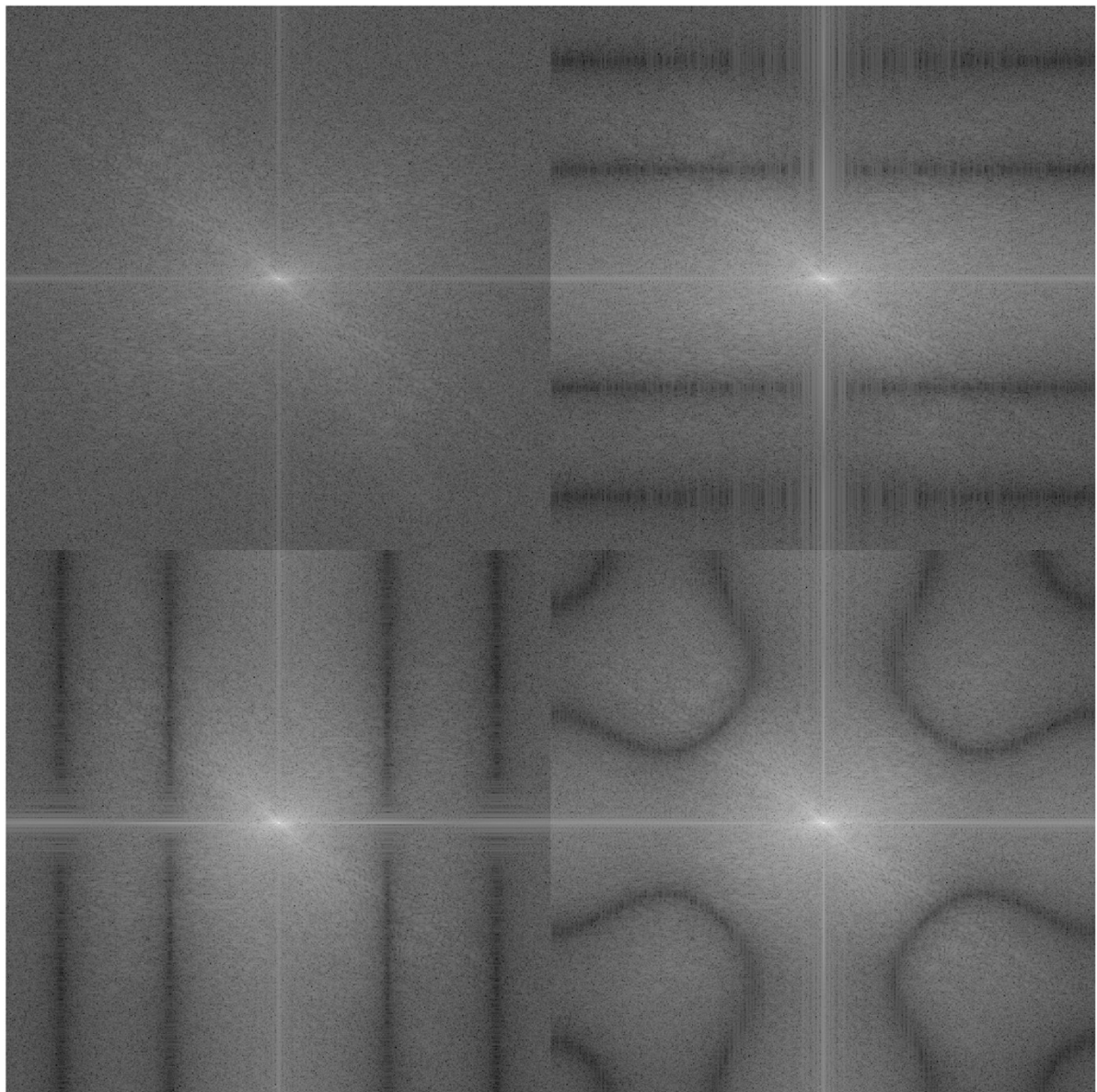
where $r^2 = x^2 + y^2$.

$$F(u, v) = F(\rho) = e^{-2\pi^2\rho^2\sigma^2}$$

where $\rho^2 = u^2 + v^2$.

Aplikace

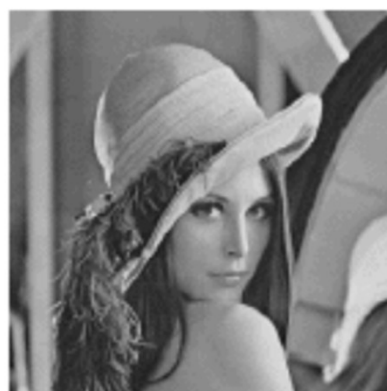
- Filtrace
- Detekce rozostření
 - Celková kvalita
 - Směrovost



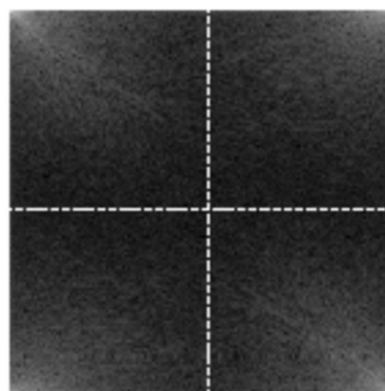
Aplikace

- Aliasing – vzniká v případě, že FT podvzorkováváme – v signálu jsou vyšší frekvence než vzorkovací – tedy např. při převzorkování
- Odstranění/potlačení šumu obecně pomocí filtrů pro rozmazání
- Odstranění/potlačení šumu obecně pomocí inverzní filtrace
- Hledání periodicity – autokorelace (normalizovaná)

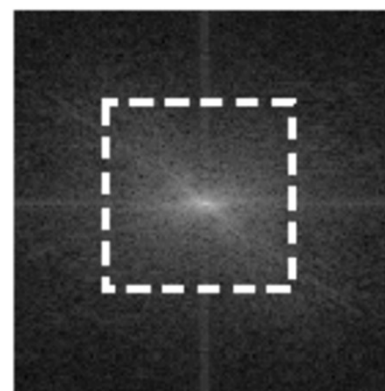
Rozložení energie ve spektru - komprese



Size 256x256



DFT Transform



This subimage (128x128)
contributes to 68.7% to the
total energy of the image.
(Poor compaction capacity)

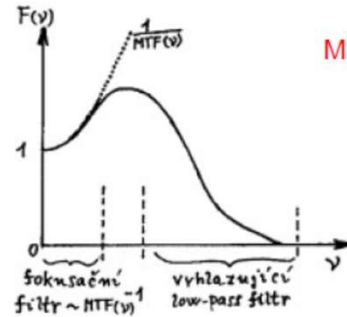


Inverse
Transform

3. Rekonstrukce obrazu ve frekvenční oblasti

■ Pásmové filtry

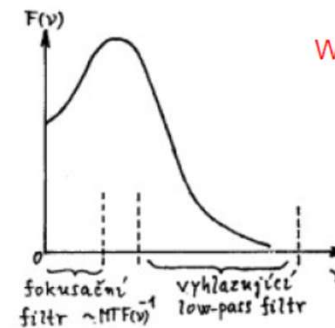
- jsou schopny zaostřovat a zvýrazňovat details - současně s vyhlazováním
- skládají se ze dvou částí:
 - počáteční vzestupná část – zesílení vyšších frekvencí = fokusace (zaostřování detailů v obraze)
 - plynule navazující klesající část – jako u low-pass filtrů = vyhlazení statistických fluktuací (šumů)



METZ

$$F(v) = \frac{1}{MTF(v)} \cdot \left[1 - (1 - MTF(v)^2)^k \right]$$

MTF(v) ... modulační přenosová fce
k ... form-faktor – určuje relativní zastoupení
fokusovací a vyhlazovací části



WIENER

Obrázky převzaty z: <http://astronuklfyzika.cz/Filtry.htm>

■ Homomorfnní filtr

- je schopný normalizovat současně jas přes celý snímek a zvýšit kontrast, potlačit multiplikativní (signálově závislý) šum
- hlavní myšlenka spočívá v 1. použití funkce logaritmu pro oddělení komponent osvětlení i a odrazivosti r , 2. potom filtrace ve frekvenční oblasti, 3. převod zpět do prostorových souřadnic a 4. návrat z logaritmu

$$1. z(x, y) = \ln f(x, y) = \ln i(x, y) + \ln r(x, y)$$

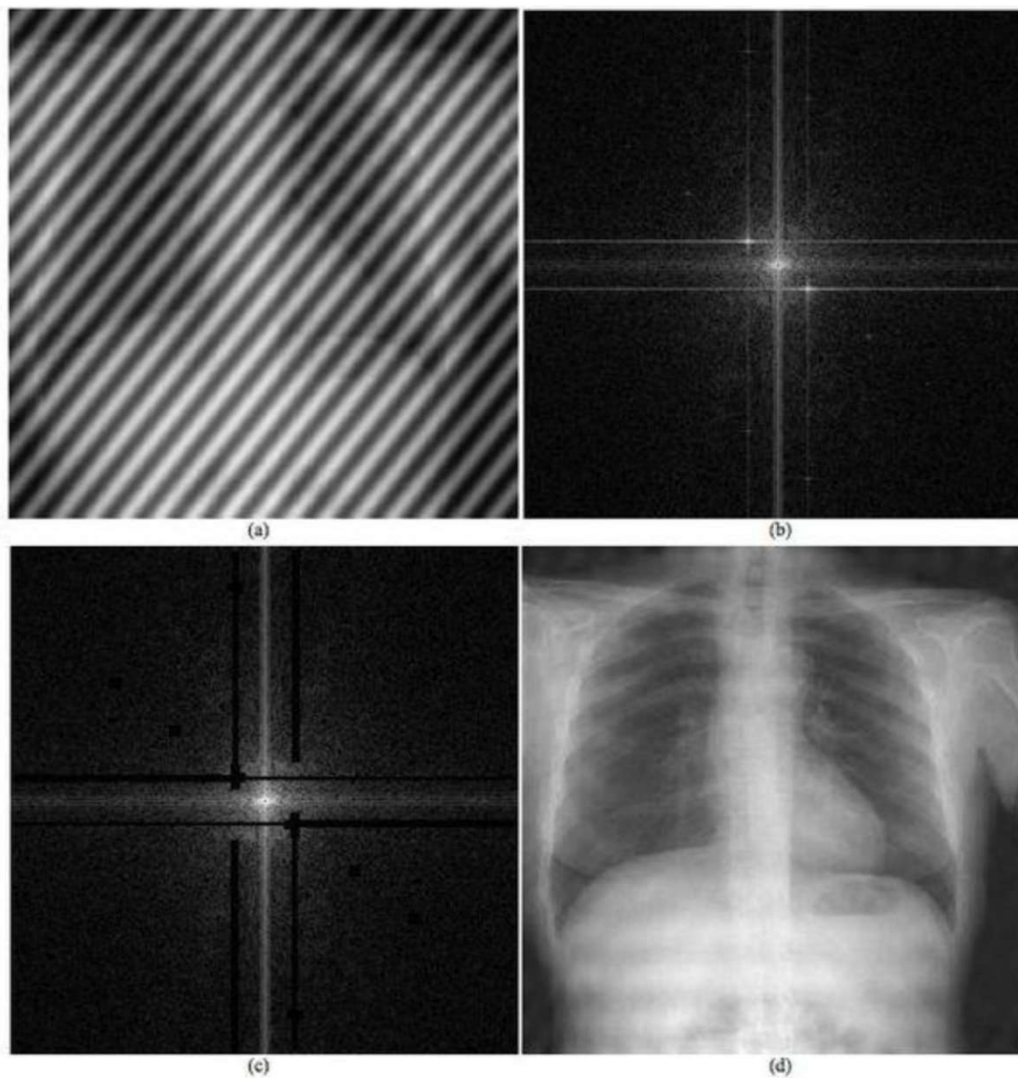
$$2. S(u, v) = H(u, v)I(u, v) + H(u, v)R(u, v)$$

$$3. s(x, y) = FT^{-1}\{S(u, v)\}$$

$$4. g(x, y) = \exp(s(x, y))$$

Filtrace ve spektru

- Snímek s rušením
- FT s rušením
- Určení příspěvku rušení
- Vynulování příspěvku rušení
- Zpětná transformace



- Snaha o nalezení modelu poruchy a odhadu jeho parametrů pro konkrétní třídy obrazů (konkrétní aplikace = stejná porucha)
- → řešení inverzní úlohy k úloze modelování poruchy
- Obvykle se uvažuje lineární model poruchy (konvoluce přes celý obrázek)

$$g(x, y) = \iint_{(a,b) \in \mathcal{O}} f(a, b) h(a, b, x, y) da db + v(x, y)$$

kde $f(a, b)$... neporušený obraz, který ovšem není k dispozici, proto se jej snažíme zrekonstruovat
 $g(x, y)$... pořízený degradovaný obraz,
 $v(x, y)$... aditivní šum
 $h(x, y)$... prostorově nezávislý model poruchy

$$g(x, y) = (f * h)(x, y) + v(x, y)$$

$$G(u, v) = F(u, v)H(u, v) + N(u, v)$$

- Úloha rekonstrukce obrazu spočívá v nalezení rekonstrukčního filtru h_R , resp. H_R , tak aby rozdíl mezi požadovaným obrazem f a výsledným zrekonstruovaným f_R byl co nejmenší

$$\varepsilon = \|f_R - f\|$$

$$f_R(x, y) = [f(x, y) * h(x, y) + v(x, y)] * h_R(x, y)$$

$$F_R(u, v) = [F(u, v)H(u, v) + N(u, v)]H_R(u, v)$$

▮ Příklady dobře modelovatelných degradací:

▮ **Relativní pohyb mezi objektem a kamerou**

- konstantní pohyb objektu ve směru osy x , rychlostí V pod dobu T (v době otevření závěrky)

$$H(u, v) = \frac{\sin(\pi VTu)}{\pi Vu}$$

▮ **Rozostřený objekt**

- špatné zaostření tenké čočky při malé hloubce ostrosti (J_1 je Besselova fce prvního řádu, $r^2 = u^2 + v^2$, a je posun v obrazu)
– model je prostorově závislý

$$H(u, v) = \frac{J_1(ar)}{ar}$$

▮ **Turbulence atmosféry**

- poruchy způsobeny tepelnými nehomogenitami v atmosféře (tetení vzduchu), které vedou k mírnému ohýbání procházejícího světla, např. v dálkovém průzkumu Země nebo v astronomii
(c je konstanta daná typem turbulence, určuje se většinou experimentálně)

$$H(u, v) = e^{-c(u^2 + v^2)^{5/6}}$$

• Inverzní filtrace

- pro obrazy, které nejsou zatíženy aditivním šumem $N(u,v)$ lze rekonstrukční filtr $H_R(u,v)$ a rekonstruovaný obraz $F_R(u,v)$ zapsat:

$$H_R(u,v) = \frac{1}{H(u,v)} \quad F_R(u,v) = \frac{G(u,v)}{H(u,v)} = R(u,v)$$

- u obrazů se šumem = šumová katastrofa - projeví se aditivní chyba (inverzní filtr systému DP je HP jehož přenos roste s frekvencí nade všechny meze – šumové složky jsou v horní části pásma mimořádně zesíleny)

$$F_R(u,v) = R(u,v) + \frac{N(u,v)}{H(u,v)}$$

Pseudoinverzní filtrace - použití inverzní filtraci jen v takovém okolí počátku roviny u,v , kde $H(u,v)$ spolehlivě dominuje nad $N(u,v)$ = nízké frekvence

• Wienerova filtrace

- vhodné i pro nezanedbatelný šum - šum má odhadnutelné statistické vlastnosti a je nezávislý na signálu
- minimalizace středněkvadratické chyby mezi f - správný (ale nepozorovaný) obraz a $\hat{f}$ - odhad správného obrazu

$$MSE = E[f(x,y) - \hat{f}(x,y)] \quad H_R(u,v) = \frac{S_{fv}(u,v)}{S_{vv}(u,v)} = \frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2 + \frac{S_{vv}(u,v)}{S_{ff}(u,v)}}$$

- nejjednodušší odhad spektrální výkonové hustoty původního nezrekonstruovaného obrazu $S_{ff}(u,v)$ je uvažovat spektrální hustotu šumu $S_{vv}(u,v) = \sigma^2$, a tedy:

$$S_{ff}(u,v) \approx S_{gg}(u,v) - \sigma^2$$

Inverzní filtrace

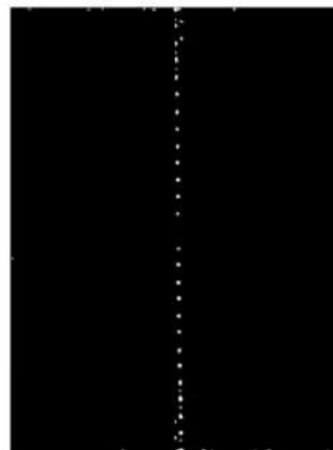
- Nr 13.1 NR 13.3 674
- Dekonvoluce – inverzní proces ke konvoluci –
obraz=zkreslení.originál $\rightarrow$ originál = obraz/zkreslení)
problém s malými členy ve filtru (zvětší neúměrně hodnotu v daném místě; na druhou stranu, již při aplikaci tohoto filtru je výsledek enormně zmenšen a tedy je zde možná ztráta dat (rozlišovací schopnost). Je-li navíc signál zašuměný, pouhá „inverzní“ aplikace filtru může vést ke zvýraznění šumu
- Ve frekvenční doméně je konvoluce násobení $\rightarrow$ inverzí je dělení $\rightarrow$ výhoda řešení ve frekvenční oblasti
- Wiener NR 13.3 674,675

Inverzní / Wienerova / optimální filtrace (dekonvoluce)

- Použití filtru na obnovení poškozeného obrazu. Poškození musí být „známé“ (odhadnutelné) aby šlo vytvořit jeho model = filtr. Poškození může být šum, rozmazání ...
- Rušení se musí objevit v celé ploše – jinak korekce část snímku „opraví“ ale zbytek poškodí (např. periodické rušení pouze v polovině snímku)
- Vychází z frekvenčních znalostí poškození a původního obrazu, šum je aditivní, poškození odpovídá konvoluci
- Výsledek = original * zkreslení + šum chceme získat (odhad) original
- $\text{Filtr} = (\text{poškození} \cdot \text{Original}) / (\text{poškození}^2 \cdot \text{original} + \text{šum})$ (signály jsou střední spektrální hustoty)
- $\text{odhadOriginal} = \text{Filtr} \cdot \text{Výsledek}$
- <https://www.ft.unicamp.br/docentes/magic/khoros/html-dip/c7/s1/frontpage.html>



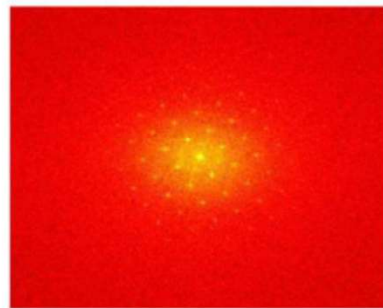
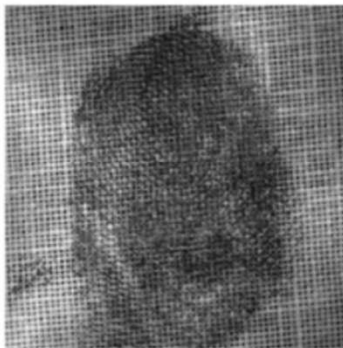
$|F(u,v)|$



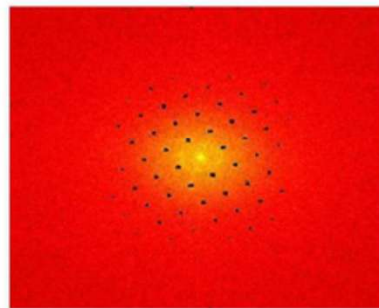
remove
peaks



join lines
removed



$|F(u,v)|$



remove
peaks



Periodic background
removed

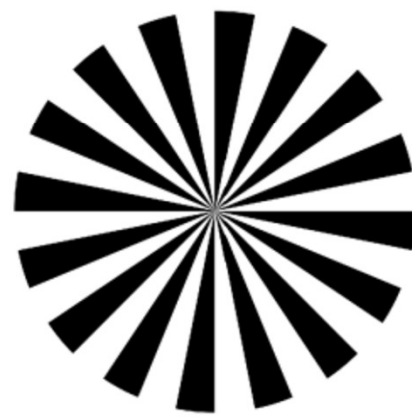
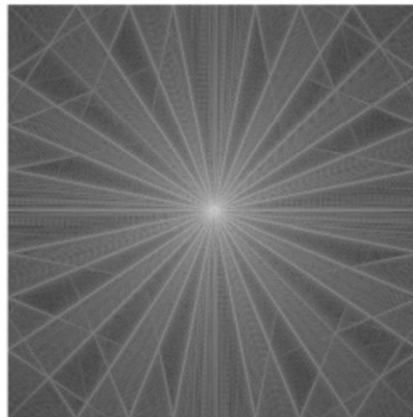
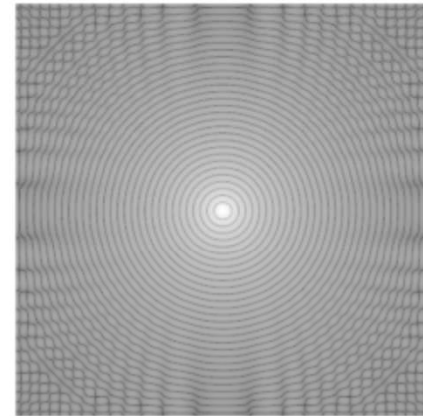
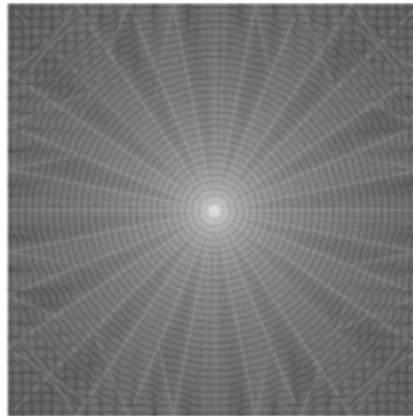
Inverzní a wienerova filtrace

- $S = R \cdot U$ $U = S / R$
- Se šumem $U1 = S / R + N / R$
v případě, že odhadneme šum na $N1$ $U2 = S / R + (N - N1) / R$
- **Obraz_vysledny = W_filter * (G . Obraz_originální + šum)**
minimalizace chyba = Obraz_vysledny – Obraz_originální
 $S = R \cdot U$, kde $C = S + N$ $C = R \cdot U + N$

$$\|S\|^2 + \|N\|^2 \approx \|C\|^2$$

$$\Phi = \frac{\|S\|^2}{\|S\|^2 + \|N\|^2}$$

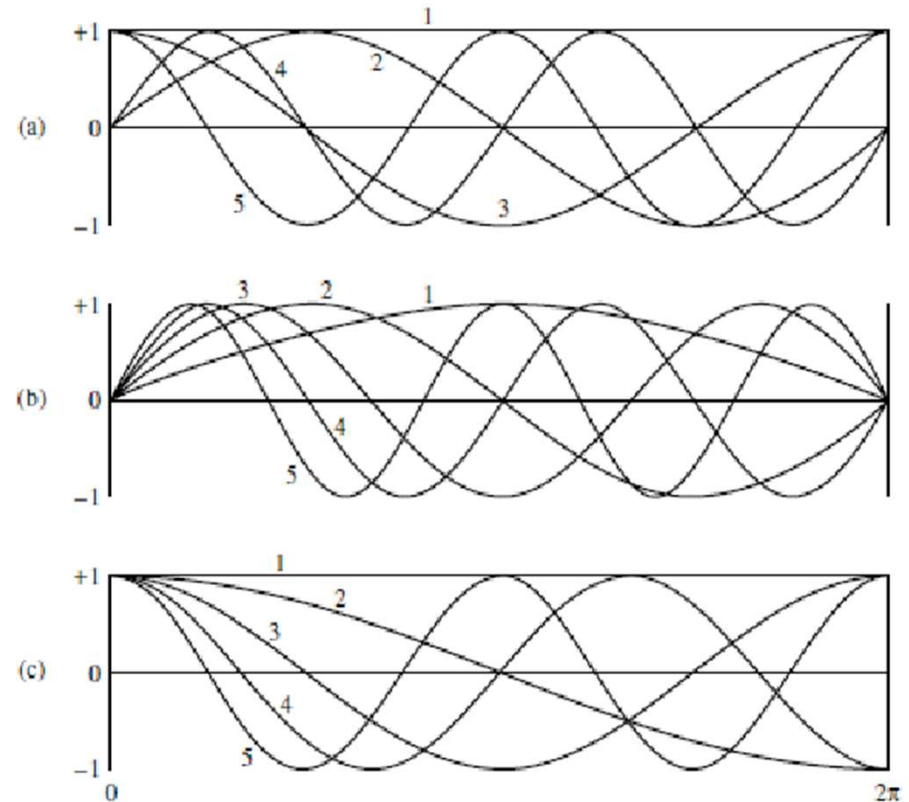
- Rozmazaný snímek $\rightarrow$ fft ; fft rozmazání; fft / fft rozmazání $\rightarrow$ ifft = „original“



Sinová a cosinová filtrace

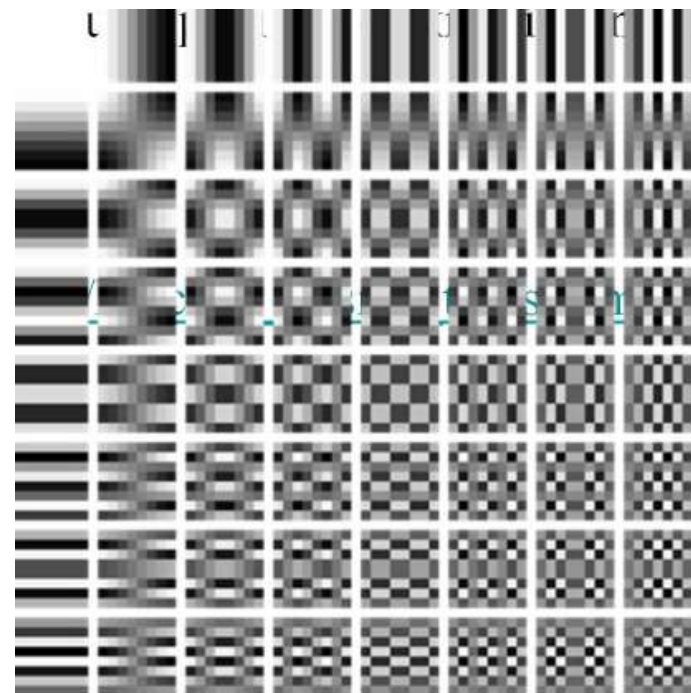
$$t(i, j)^{\bullet} = c(i, j) \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} s(m, n) \cos\left(\frac{\pi(2m+1)i}{2N}\right) \cos\left(\frac{\pi(2n+1)j}{2N}\right)$$

$$s(m, n) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} c(i, j)^* t(i, j) \cos\left(\frac{\pi(2m+1)i}{2N}\right) \cos\left(\frac{\pi(2n+1)j}{2N}\right)$$

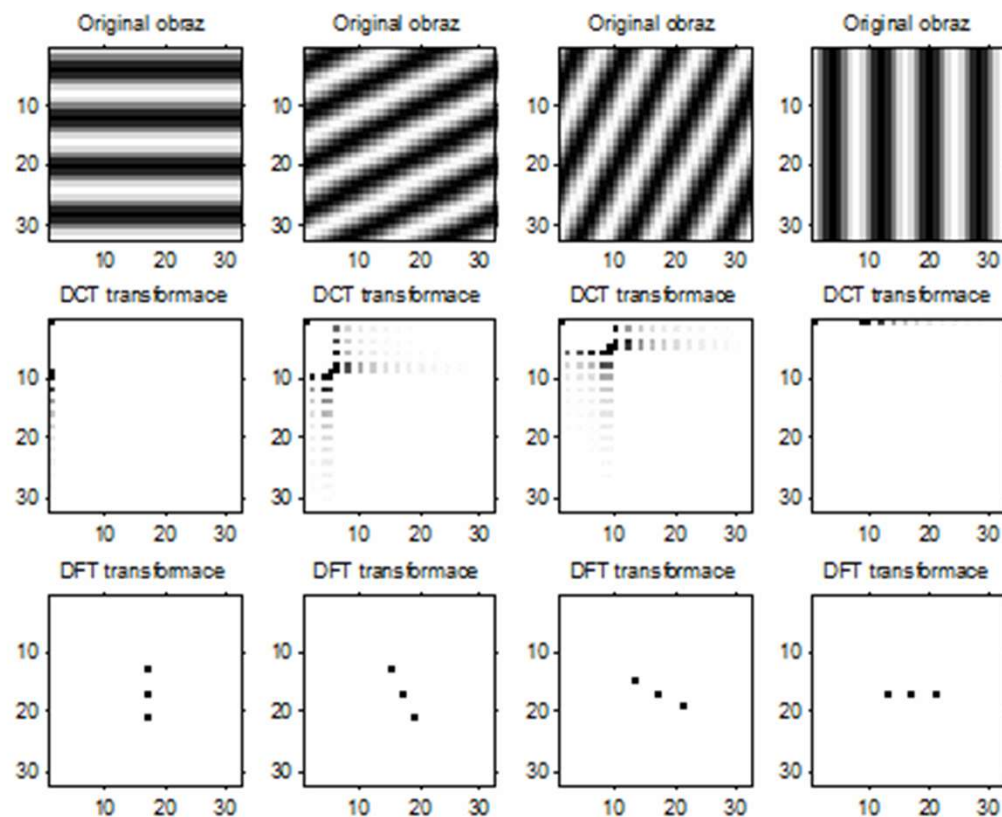
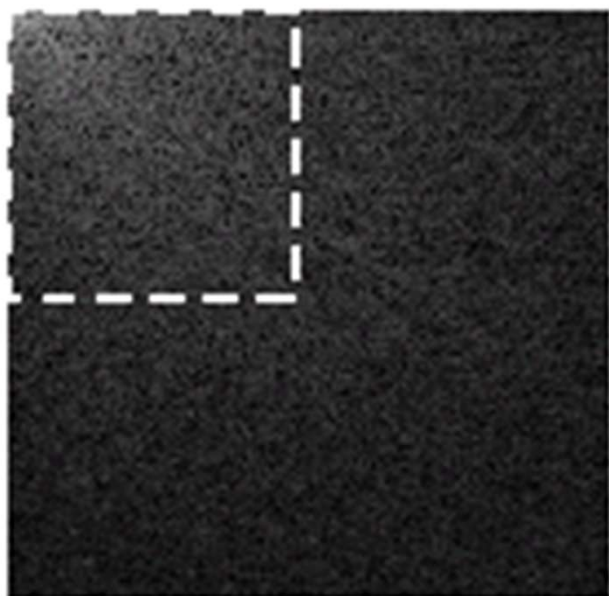


Sinová a cosinová transformace

- Pro signály s hodnotou (cos), nebo nulou (sin) na okraji
- Více energie v nižších koeficientech - komprese
- Obsahují pouze cos (resp. sin) členy, ale i v půlperiodách nr 12.4/645
- Obraz jsou reálná čísla
- Obrázek – báze funkce cos [wikipedia]



- Srovnání DCT a FT

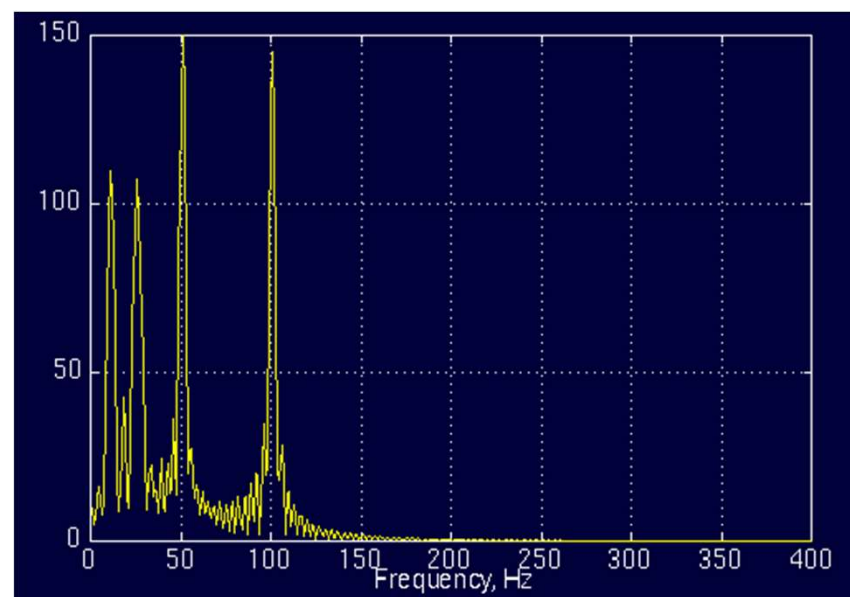
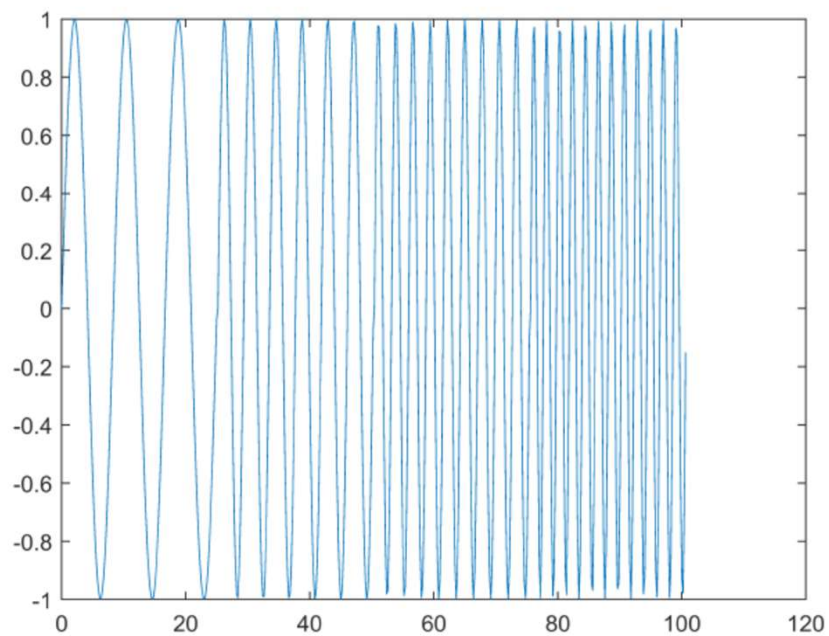


FT – lokalizace výskytu

- FT je buď v čase nebo ve frekvenci
- Lokalizace frekvence v konkrétním čase není možná
- Přiřazení frekvence k času – ShortTimeFT nebo Wavelety

Short time FT

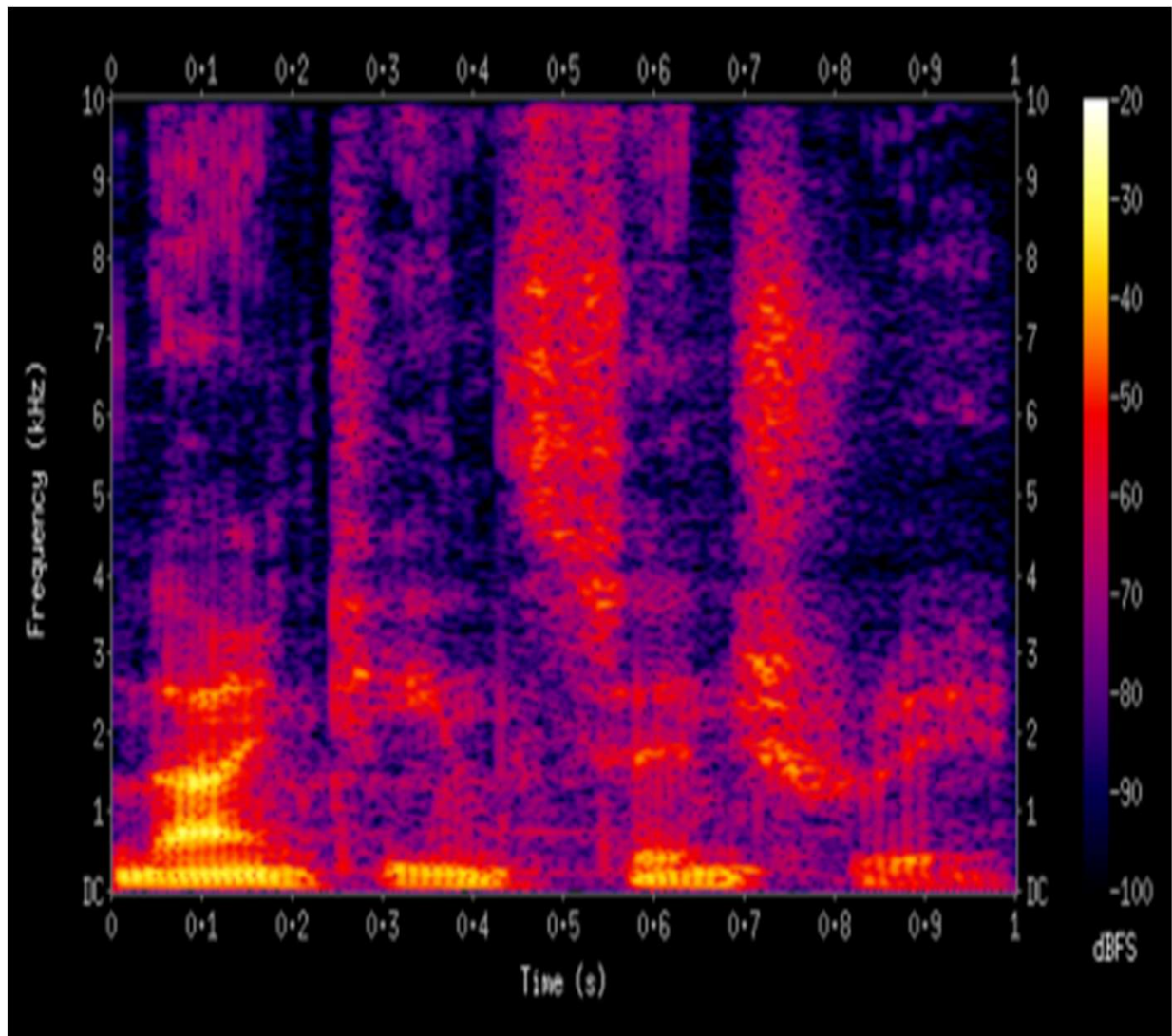
- z FT nelze určit výskyt v čase



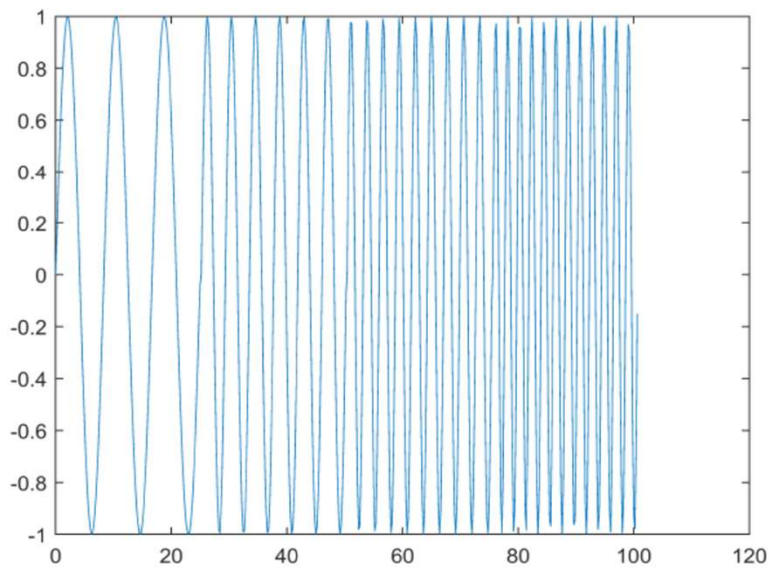
Short Time Fourier Transform

- <http://users.rowan.edu/~polikar/WTpart2.html>
- Rozdělení signálu na úseky s nezávislou FT, popř celý úsek s posuvným oknem
- 2D výstup pro 1D signál – k frekv. spektru se přidává počátek intervalu detekce v čase (posun může být o daný krok) tj. funkce frekvence a polohy
- Všechny průběhy mají stejné spektrum (stejná délka) odpovídající použitému časovému úseku .
- Větší délka znamená horší lokalizace v čase (krátce působící frekvence je „roztažená“ mimo úsek ve kterém se nachází)
- Kratší délka znamená nemožnost detekcí delších vlnových délek (nižších frekvencí) – čím lepší lokalizace, tím méně frekvencí je v ní zastoupeno (Heisenberg)
- Wavelet.org/tutorial/tf.html

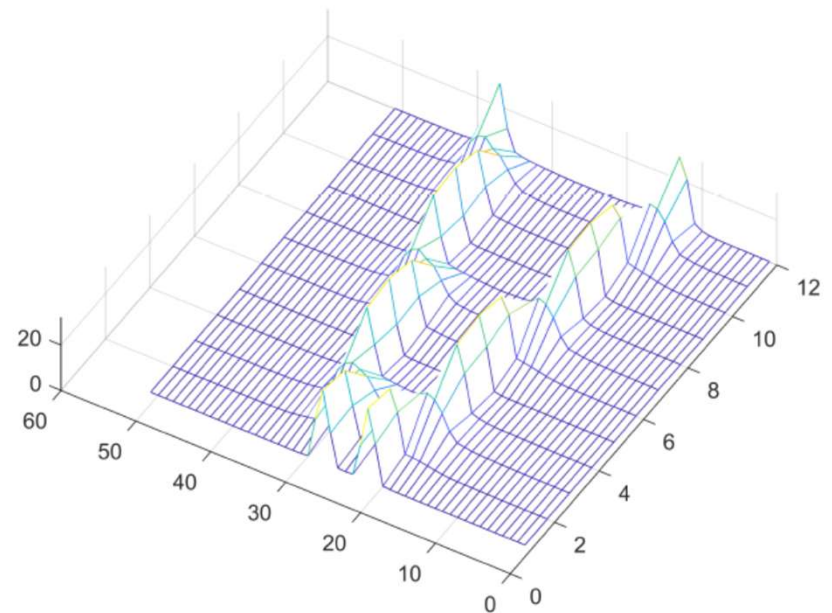
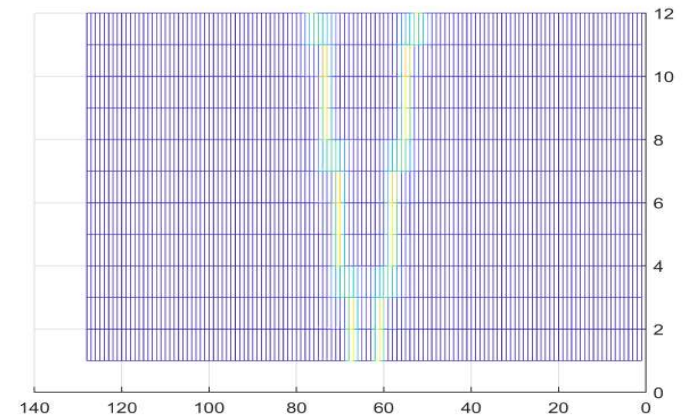
- Spectrogram [wikipedia]

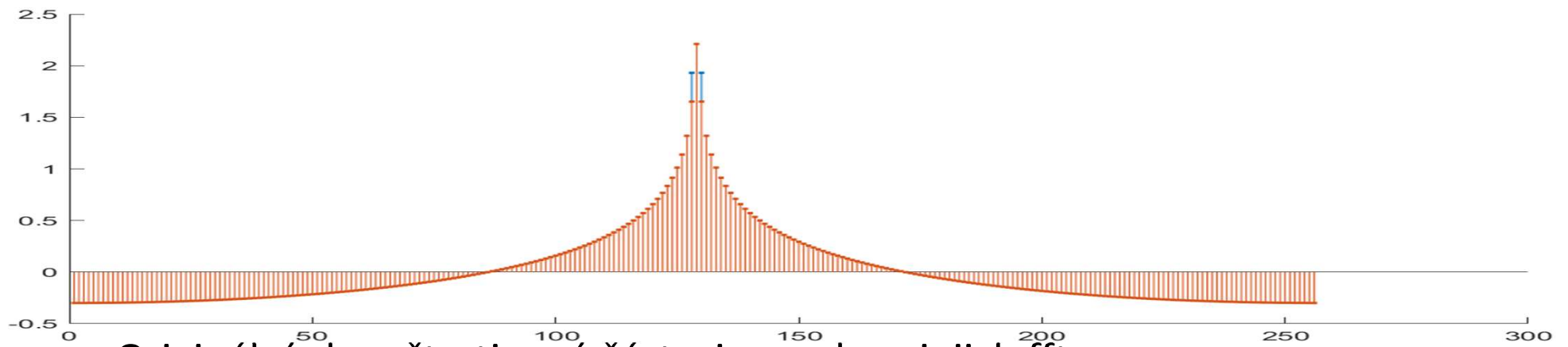
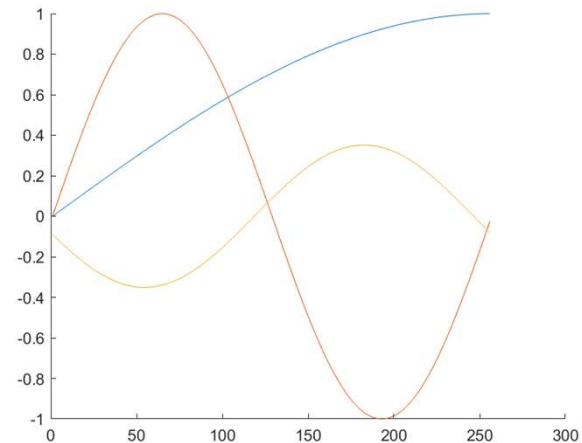
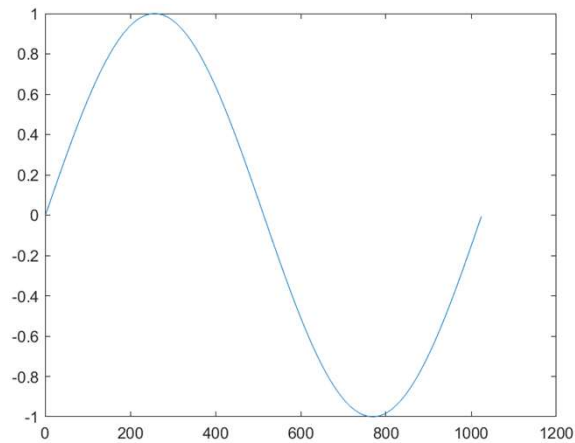


Short Time FT

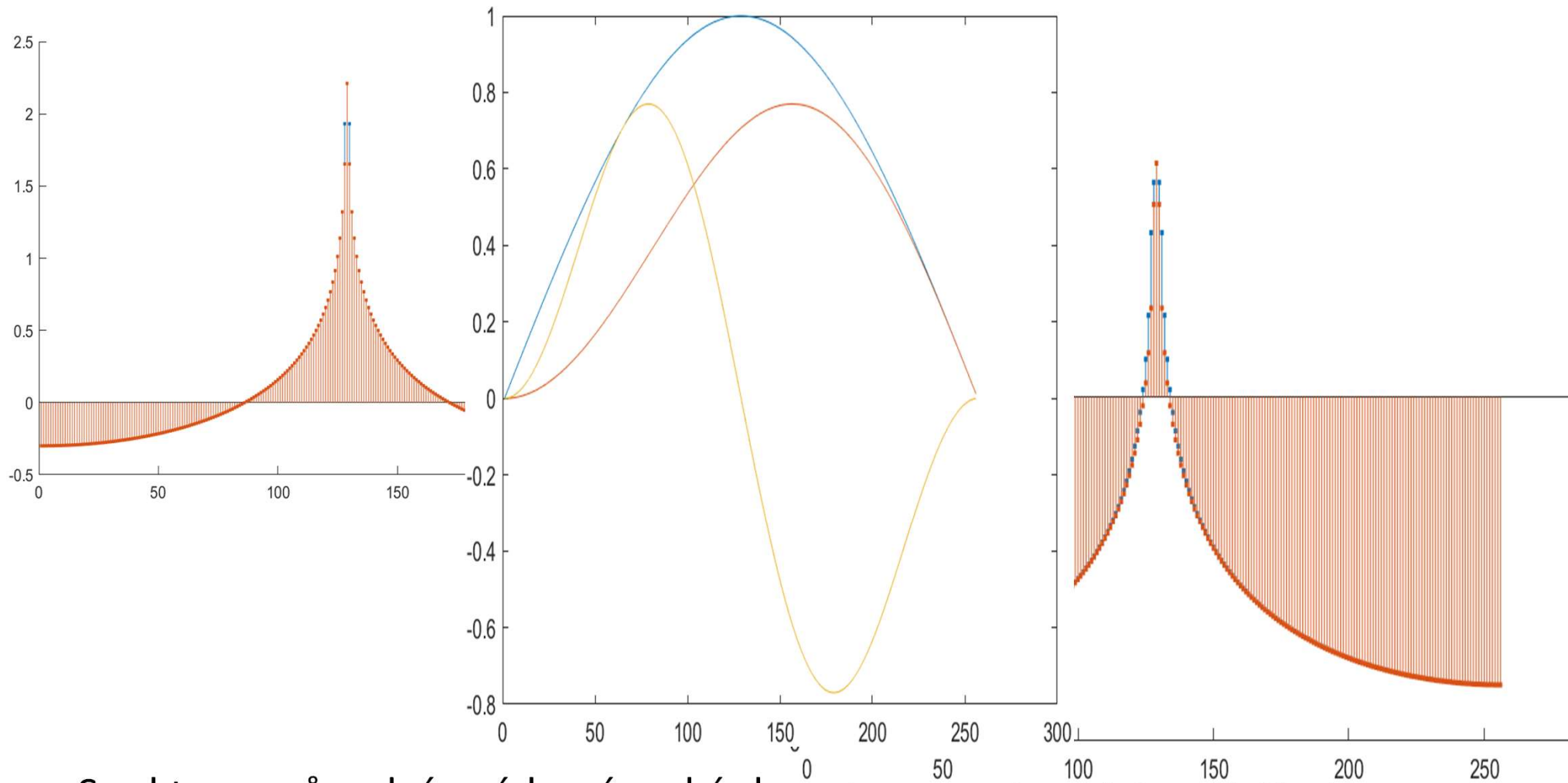


- různé frekvence v různých časech ;
a spektrum v čase





- Originální vlna; čtvrtinová část+sinusovka a jejich fft
(žlutý průběh – odpovídající frekvenční složka z modrého průběhu)



- Spektrum původní a získané s okénkem typu sin (modry průbeh+)

STFT

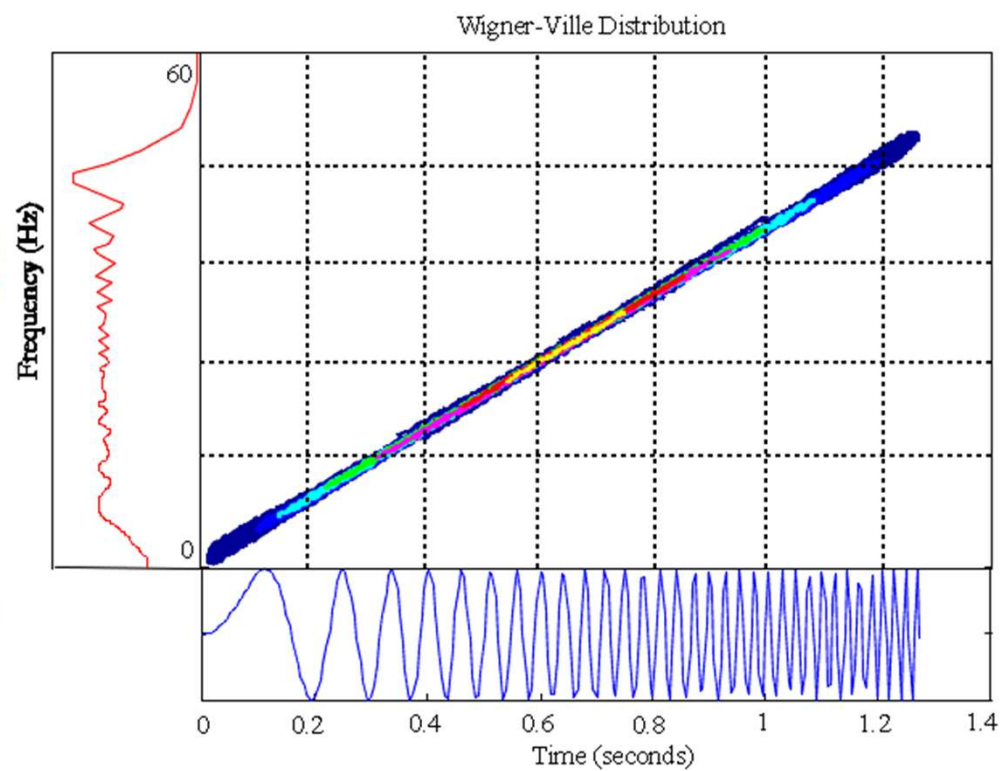
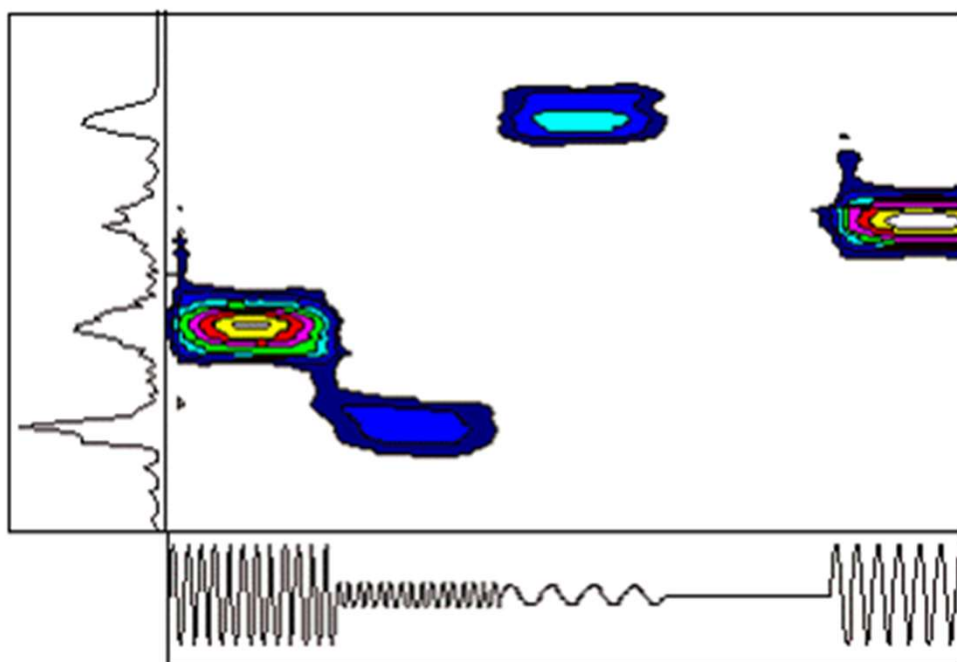
- Výsledná složka v FT se vztahuje k celému časovému intervalu (signál je funkcí času, FT funkcí frekvence, potřebujeme funkci t i w)
- Kdy se složka vyskytuje?
- Časové rozlišení výběrem kratších intervalů
- Kratší interval dá lepší časové určení, ale omezí rozsah frekvencí

Windowing

- Potřebujeme-li vybrat pouze část signálu, tento výběr změní i výslednou FT
- K získání vybraného úseku se často používá násobení „oknem“ (okénkovou funkcí, např. i obdélníkovou funkcí – DirichletW.)
- Signál je násoben oknem (Hann, Hamming, Gaussian), okno nuluje datavně intervalu a váhuje hodnoty uvnitř intervalu – potlačením krajů mění i frekv. průběh
- Okno je „Gaussového“ typu – bez ostrých hran, s potlačením konců (odstranění ostrých přechodů mezi koncem a začátkem signálu tj. v signálu nepřekryjí vyšší frekvence)
- okna „gauss“ na kraji a ve středu konstantní hodnota (Tukey W....)
- výběrem okna mohou splynout dvě frekvenční čáry, nebo silnější čára může překrýt slabší maximum (viz. „rozšíření“ spektrální čáry pro frekvence, které nejsou celočíselným násobkem délky intervalu) -> okno je nutno volit podle účelu použití (detekované vlastnosti a typu signálu)

windowing

- Okna ve frekvenční doméně mají „sinc“ tvar s tím, že mají různou šířku prvního laloku (snažíme se aby byl co největší) a různý útlum ostatních laloků (snažíme se aby byl co největší) : obdélníkové – flat top (má negativní kraje)
- Okna – Hanning, Hamming, Gauss, Kaiser, ...
- Kompromis mezi rozlišením blízkých frekvencí nebo frekvence rozdílných amplitud



wavelet

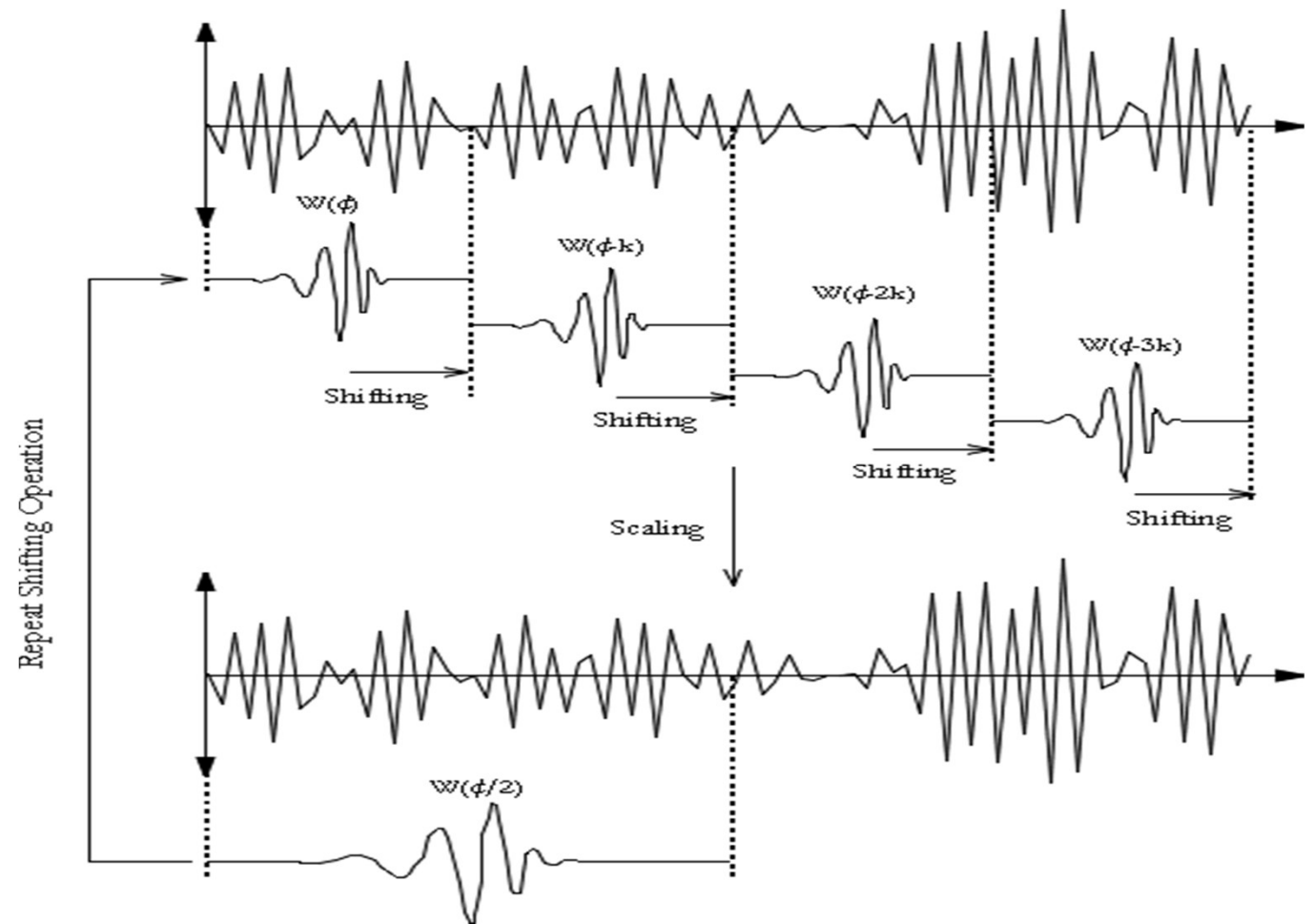
- <http://users.rowan.edu/~polikar/WTpart1.html>
- <http://users.rowan.edu/~polikar/WTpart3.html>
- Složitější teorie. Více funkcí pro jádro. Lepší lokalizace t/w
- STFT – okno konstantní velikosti se posouvá po signálu - stejný rozsah frekvencí
- Na rozdíl od STFT jsou zde lokalizovány všechny frekvence (od nejdelší po nejkratší)
- Výsledné zobrazení jednorozměrného signálu je matice (může mít různé rozlišení v různých řádcích na rozdíl od STFT)
- Princip neurčitosti – nemůžeme určit kdy se frekvence projevuje v čase, ale můžeme určit, které frekvenční pásmo je ve kterém časovém intervalu.

wavelet

- Featured transformation – modifikuje data, zachovává informaci
- WT okno mění rozměr a posouvá se po signálu odpovídající délky = různé rozlišení pro různě dlouhé úseky (krátký úsek: dobrá prostorová lokalizace pro vysoké frekvence, dlouhý úsek : nízké frekvence se špatnou časovou lokalizací)
- Výsledek udává zda je daná frekvence přítomná a zároveň i místo kde (u FT se průběh sinového signálu proloží celou délkou a zjistí se shoda; u WT se vezme jedna perioda a s ní se zjišťuje shoda v jednotlivých pozicích signálu)

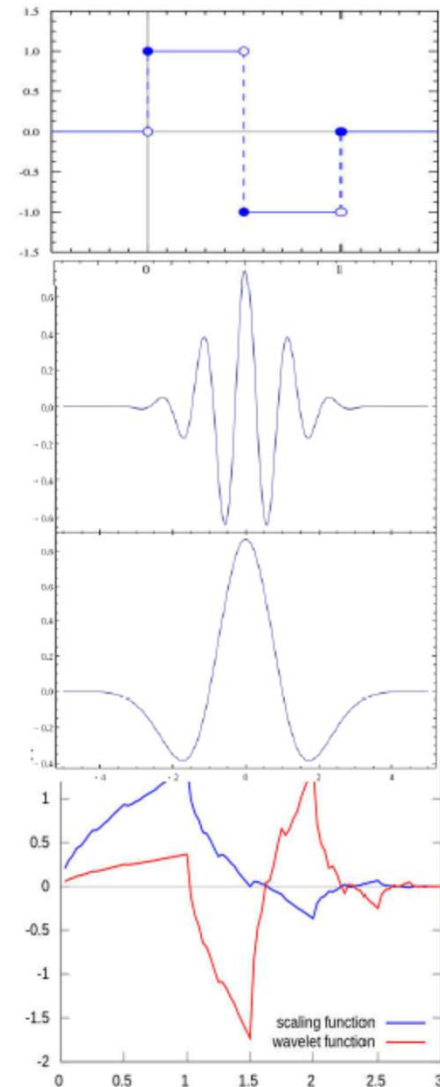
Wavelet

-



Wavelet - základy

- Vlnka (wave-let) – funkce pro jádro transformace NR 730
- Mateřská vlnka (mother wavelet) ψ – základní tvar vlnky
Uvedené vlnky – Haar, Morlet, Mexican Hat, Daubechies
- Posun (translation/shift) τ
- Měřítko (scale) s
- Velikost okna se mění (se změnou měřítko vlnky)
- Wavelet.org/tutorial/wbasic.html
- Wavelet.org/tutorial/whistory.html



Wavelet základy

- Scale – měřítko pro úpravu základný (mother) vlnky; základní délka přes celý rozsah je $=1$; (scale je obdoba periody); v dalších krocích se scale zmenšuje;
- Dá se i naopak (zvětšovat hodnotu scale) – základní vlnka je nejkratší (algoritmus dif/sum) – délka by měla odpovídat největší frekvenci, kterou chceme detekovat
- Měřítko se mění v určitém poměru tak aby tvořily určitá pásma pro vyhodnocení
- Translation – posun vlnky pro daný scale (a band)
- Mother wave – například jedna perioda cosinového průběhu; další průběhy jsou pak s menší periodou (větší frekvencí)

Wavelet spojitáWT

- Spojitá i diskrétní pracuje s diskrétním signálem
- Spojitá WT používá menší hodnoty kroku a mezi měřítky
- Spojitá WT používá pro posun krok = 1
- Diskrétní WT používá pro posun krok = délka vlnky

- Rovnice CWT:

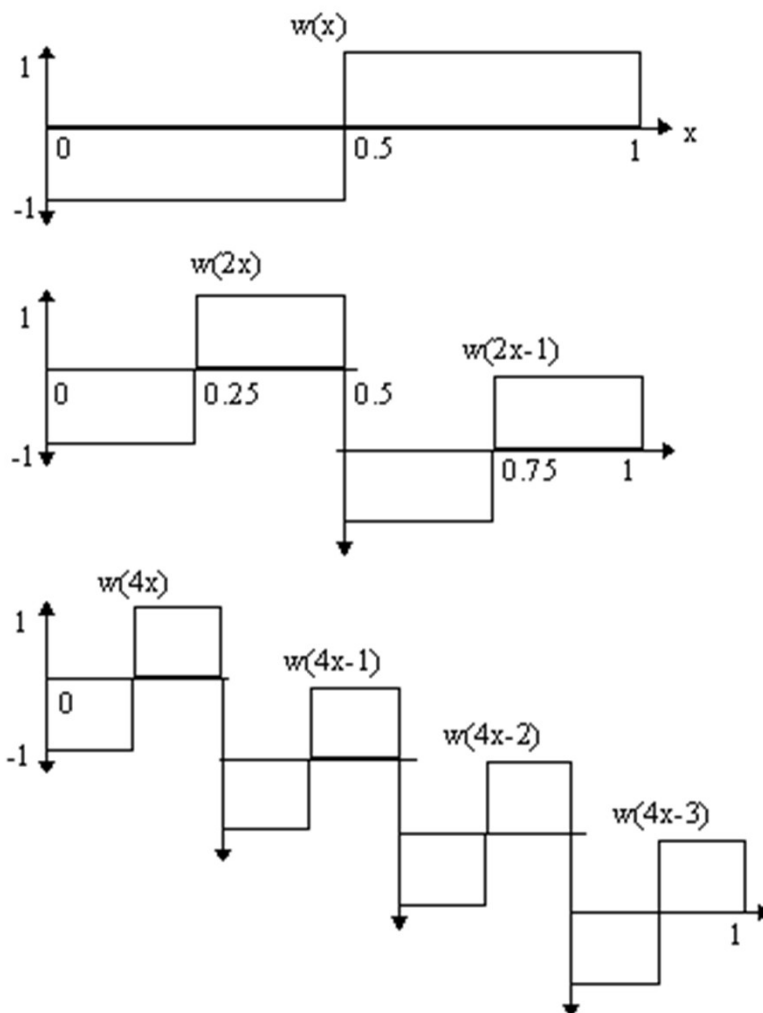
$$CWT_x^\psi(\tau, s) = \Psi_x^\psi(\tau, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int x(t) \psi^* \left(\frac{t-\tau}{s} \right) dt$$

- Inverzní tvar =

$$x(t) = \frac{1}{c_\psi^2} \int_s \int_\tau \left[\Psi_x^\psi(\tau, s) \frac{1}{s^2} \psi \left(\frac{t-\tau}{s} \right) \right] d\tau ds$$

wavelety

- Haar



Wavelet - diskrétní

- Realizace pomocí dolno a hornofrekvenčních filtrů – dekompozice, subsampling
- Nejjednodušší – Haarova vlnka (jednoduché a rychlé výpočty)
- Vytvoří se diferenční signál (sousedních hodnot) a součtový signál - pro celou délku signálu (tvar filtru typu Haarova vlnka) – dekompozice signálu do pásem NR 737
- Se součtovým signálem se pokračuje podle předchozích bodů (vyšší frekvence v něm již nejsou díky sumaci přítomny) redukce na poloviční pásmo -> jde zkrátit na polovinu (nyquist) - subsampling
- Další difference je provedena se stejnou vlnkou (ale díky součtu sousedních hodnot a redukci jde vlastně o dvojnásobnou frekvenci).
- Rozdělení na frekvenční pásma (půlením intervalu frekvencí); půlí se dolnofrekvenční úsek ; zjistí se vysoké frekvence v celém úseku a vytvoří se dolnofrekvenční úsek ;v něm už jsou jen frekvence poloviční a menší (a znovu od začátku)

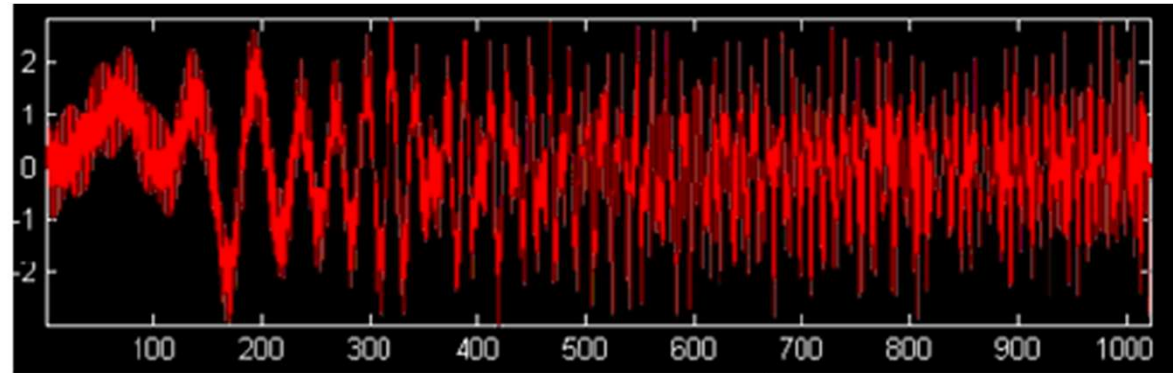
Wavelet - diskrétní

- <http://users.rowan.edu/~polikar/WTpart4.html>
- Úspora výpočetního času, s kvalitním výsledkem (CWT je redundantní) a možností zpětné transformace
- Změna scale a vzorkovací frekvence mezi úrovněmi výpočtu je ve stejném poměru
- Scale se nejčastěji mění 2,4,8,16 ... (odpovídající počet vzorků/výsledků (závislý od vzorkovací frekvence) X , $X/2$, $X/4$...)
- Vzorky odpovídají posunu vlnky v čase (o daný úsek)

DWT

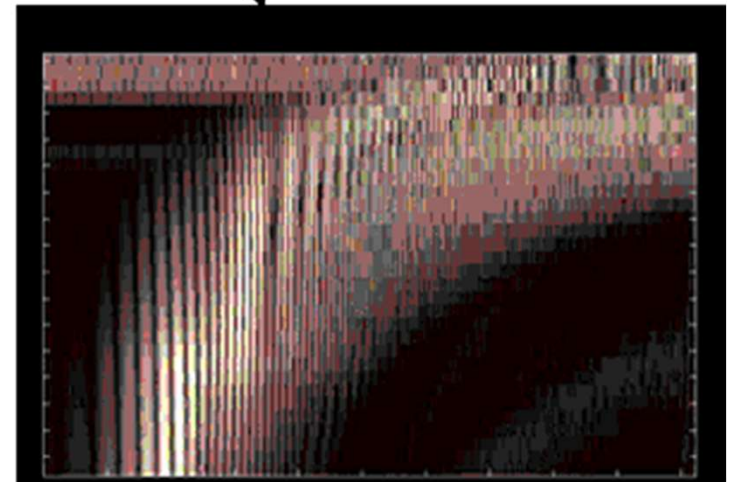
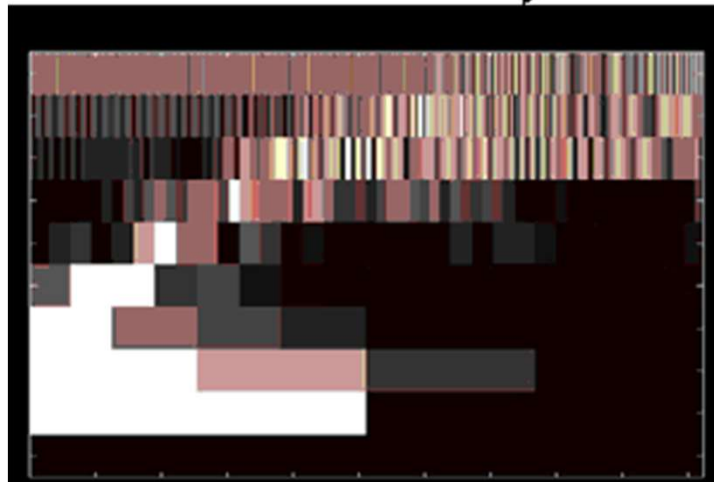
CWT

•

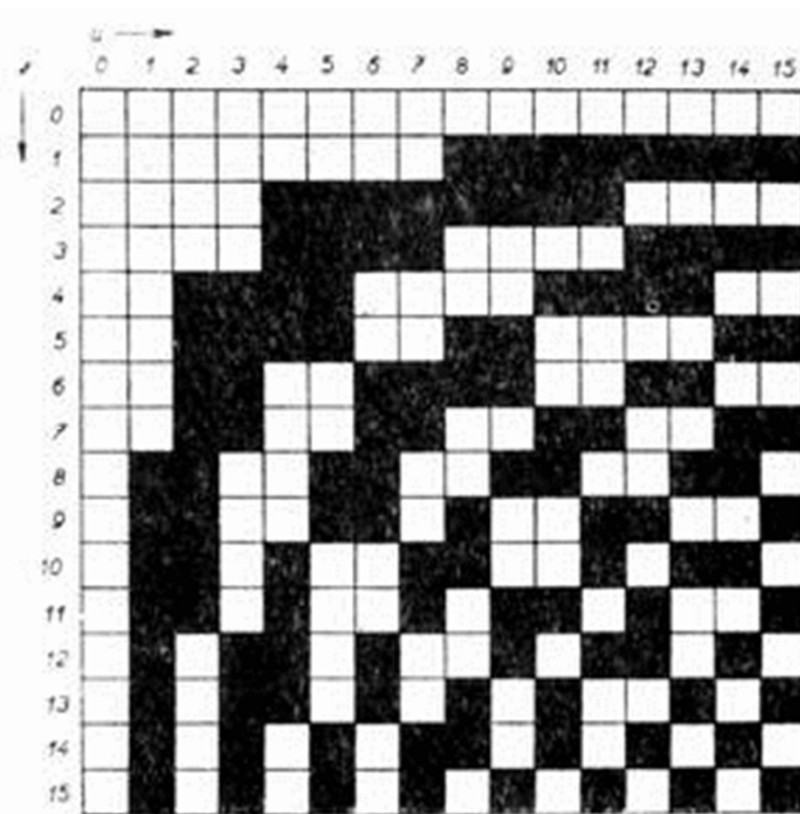
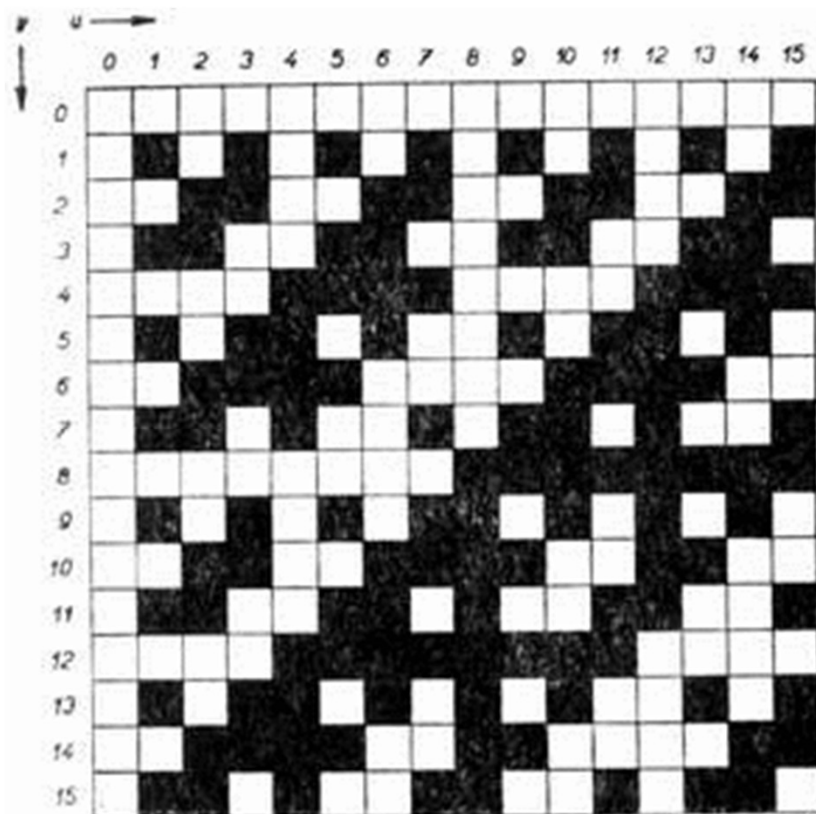


DWT

CWT

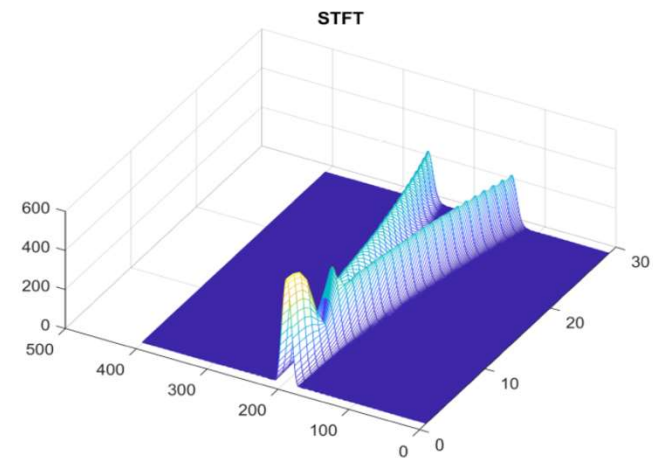
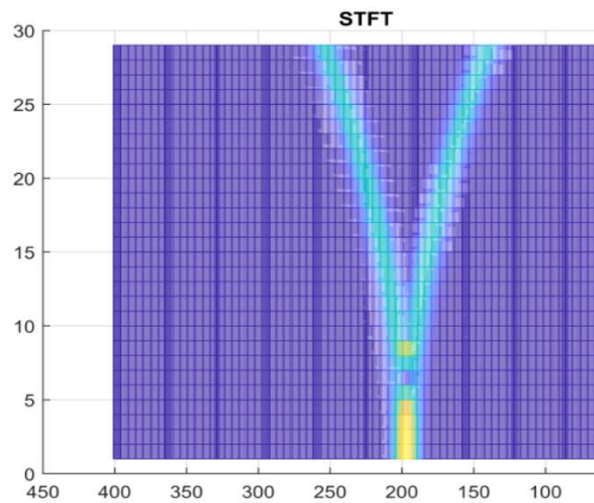
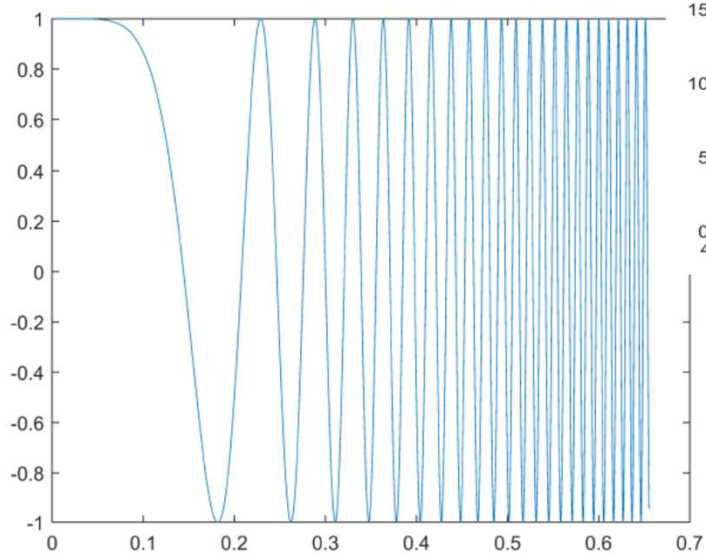


- Hadamardova matice
- Generalizovaná FT
- Čtvercová matice
- hodnoty 1 a -1.
- Řádky ortogonální - tvoří tedy bázi – navzájem kolmé vektory
- V polovině jsou hodnoty stejné v polovině opačné
- Platí i pro sloupce
- Násobení s transponovanou dává jednotkovou matici (násobenou n)
- $H(2k) = [H(k) \ H(k); H(k) \ -H(k)]$

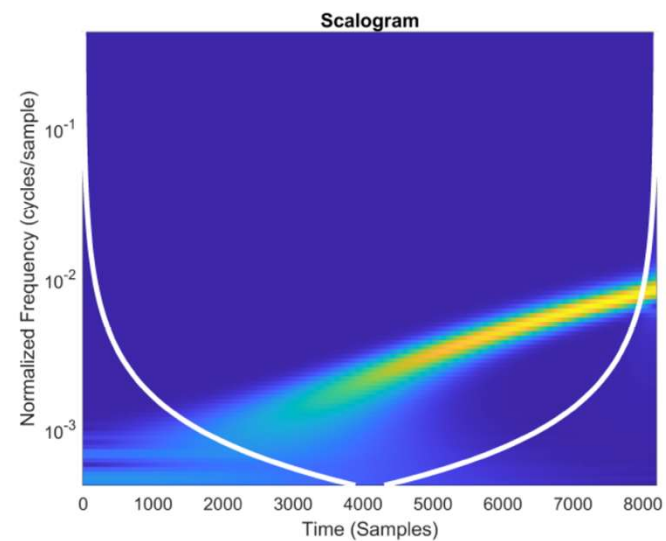


- Znáznění Hadamardovy matice (+uspořádaná podle frekvencí)

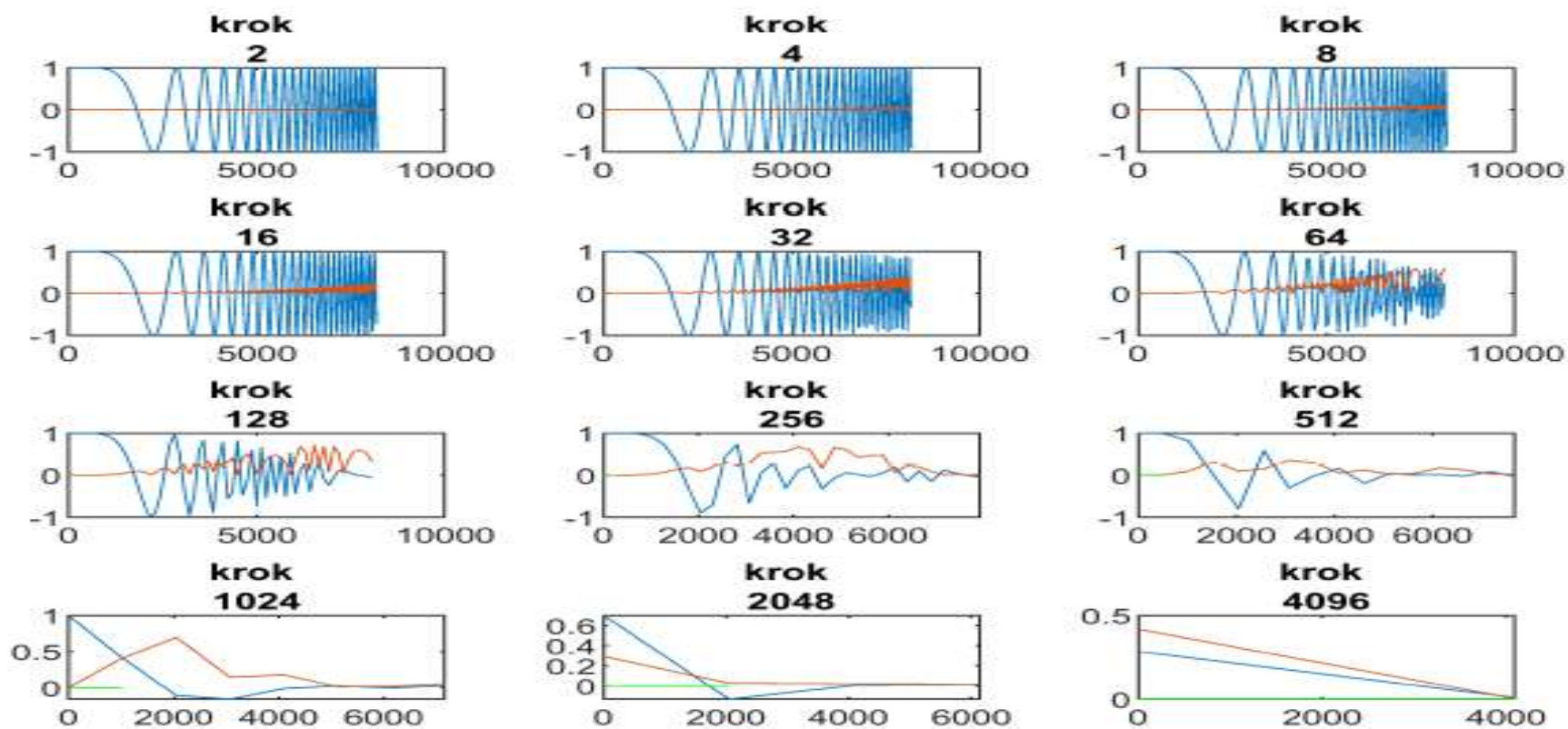
Wavelety



- Lokalizace frekvence v čase

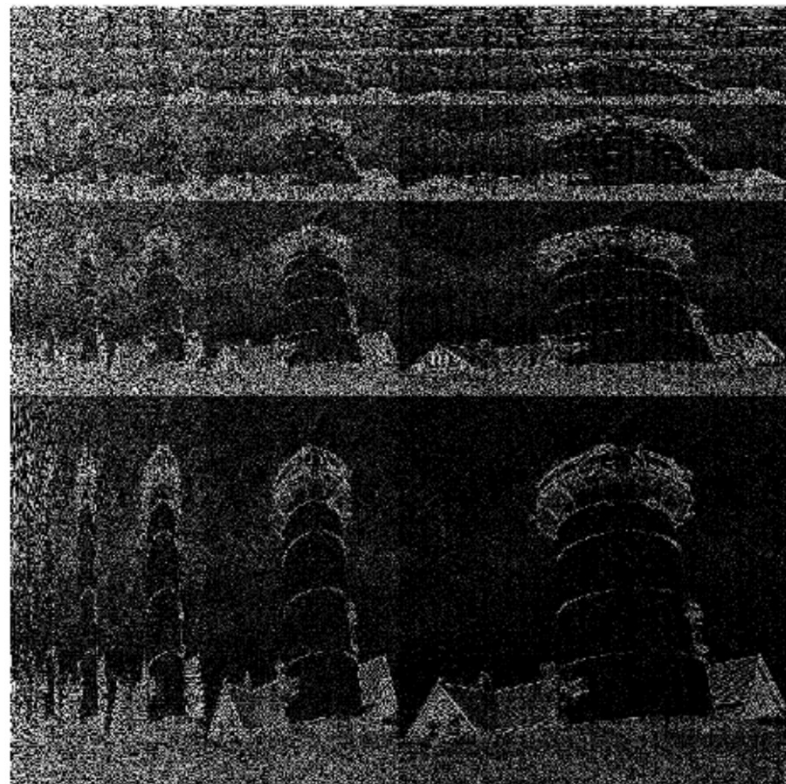


Diskrétní WT



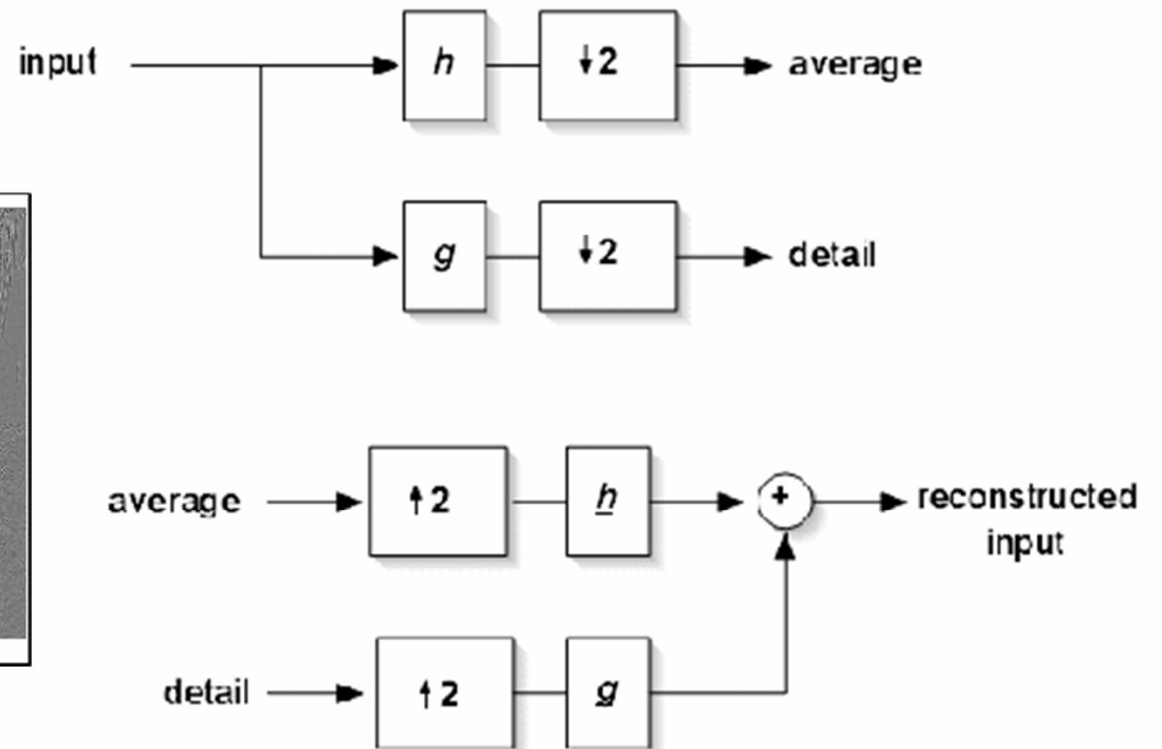
Wavelet – image processing

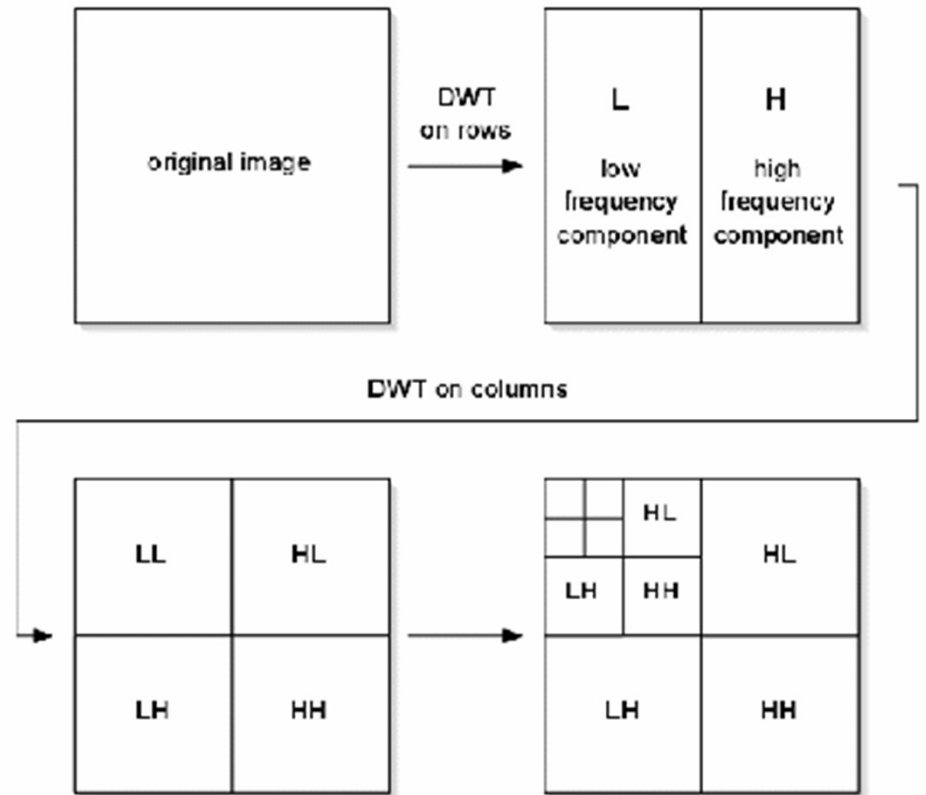
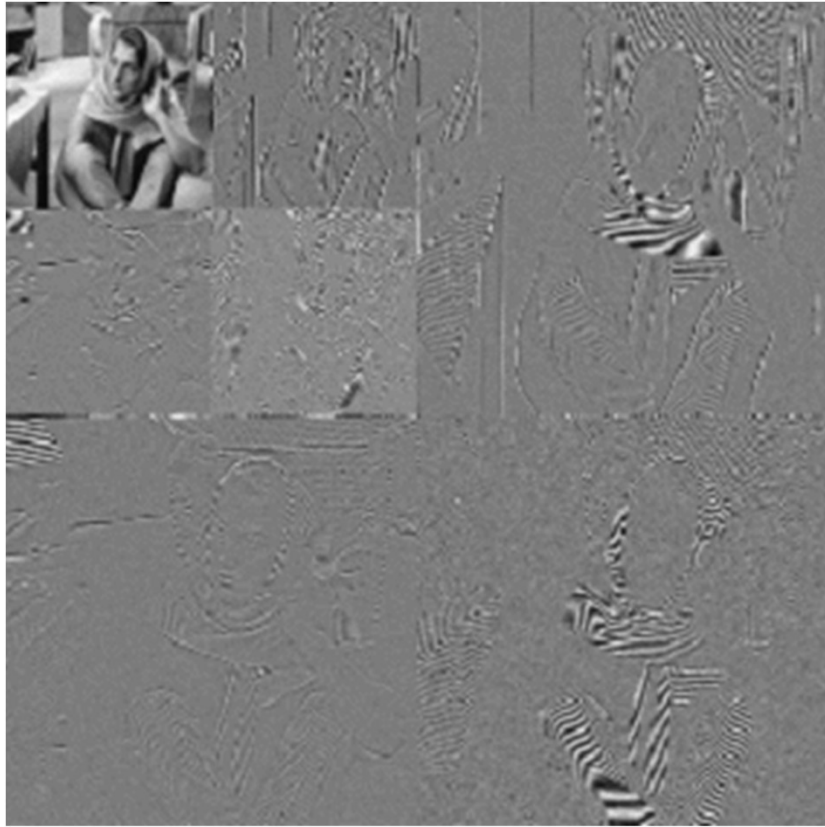
-



Filtrace

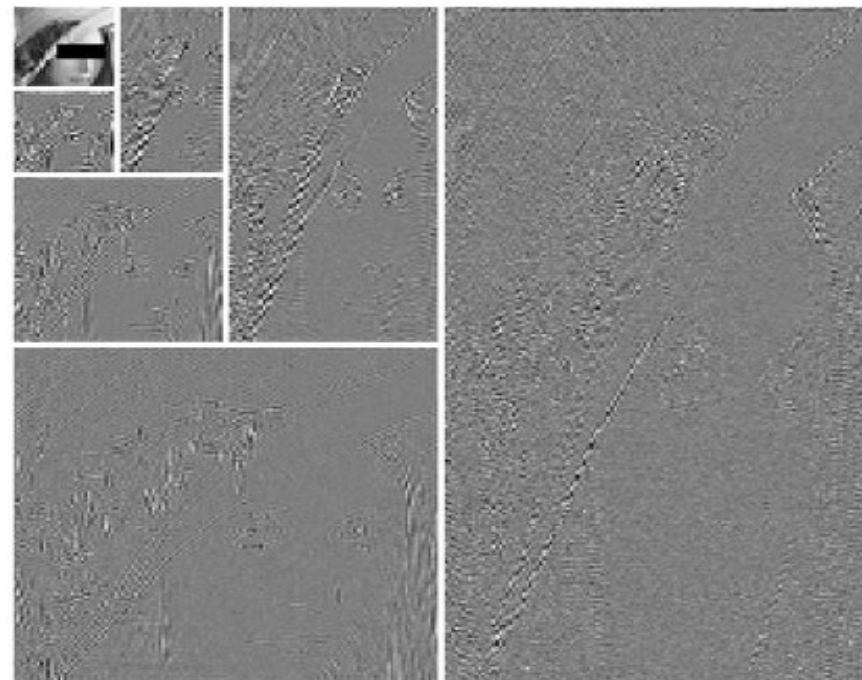
-





Wavelet – image processing

- <http://bigwww.epfl.ch/demo/ip/demos/wavelets/>
- Zpracování řádků v $M \times N \rightarrow$ Low a High každé $M \times (N/2)$
- Zpracování sloupců v L i H; $L \rightarrow LL$ a LH ; $H \rightarrow HL$ a HH
- V dalším kroku se zpracovává sekce LL
- Další možnost [<https://www.intechopen.com/books/wavelet-theory/the-discrete-quincunx-wavelet-packet-transform>]



Literatura

- Nr.com
- <http://users.rowan.edu/~polikar>
- Wavelet.org
- Wikipedia - hesla